2.11 Jocs i estratègies guanyadores

En els exemples següents veurem que el coneixement de les matemàtiques ens pot servir per a entendre millor els jocs en general, i els jocs d'atzar, en particular.

Un joc de fira

Suposem que en una fira ens proposen el joc següent (conegut a les fires del Mig Oest dels EUA i Anglaterra amb el nom de *chuck-a-luck*):

Apostem 1 000 ptes. a un cert número entre 1 i 6 i tirem tres daus. Aleshores:

(I) Si surt en un dels daus, guanyem 1 000 ptes.

(II) Si surt a dos dels daus, guanyem 2 000 ptes.

(III) Si surt als tres daus, guanyem 3 000 ptes.

(IV) Si no surt a cap dau, perdem les 1 000 ptes.

La qüestió és saber si és un joc en el qual tenim més possibilitats de guanyar o de perdre.

Per sentit comú, tenim més probabilitats de perdre; ja que, si el senyor que ens proposa el joc perd sistemàticament diners, no s'entén que està fent a la fira. Intentarem justificar-ho, doncs, amb arguments matemàtics.

Suposem que hem triat el número al qual apostem (per exemple, l'1 per a fixar idees). Aleshores observem que quan tirem tres daus podem obtenir $6 \times 6 \times 6 = 216$ resultats. A més, d'aquests resultats:

(I) Només $1 = \binom{3}{3}$ vegada surten tres uns.

(II) $15 = \binom{3}{2} \cdot 5$ vegades surten dos uns.

(III) $75 = \binom{3}{1} \cdot 5^2$ vegades surt un u.

(IV) Els $125 = \binom{3}{0} \cdot 5^3$ vegades restants no surt cap u.

A partir d'aquests resultats, raonant (per simplicitat) com en el problema de la secció 2.6, si suposem que juguem molts cops (per exemple 216 000 cops), tenim:

$$\begin{array}{rlr}
\text{(i)} & \text{Traient 3 uns, guanyem } 1\,000 \text{ cops} \times 3\,000 \text{ ptes.} = & 3\,000\,000 \text{ ptes.} \\
\text{(ii)} & \text{Traient 2 uns, guanyem } 15\,000 \text{ cops} \times 2\,000 \text{ ptes.} = & 30\,000\,000 \text{ ptes.} \\
\text{(iii)} & \text{Traient 1 u, guanyem } 75\,000 \text{ cops} \times 1\,000 \text{ ptes.} = & 75\,000\,000 \text{ ptes.} \\
\text{(iv)} & \text{Traient cap u, perdem } 125\,000 \text{ cops} \times (1\,000 \text{ ptes.}) = & -125\,000\,000 \text{ ptes.} \\
\hline
 & & -17\,000\,000 \text{ ptes.}
\end{array}$$

Per tant, en resum, perdem 17 000 000 ptes. quan apostem $216\,000 \times 1\,000$ ptes., és a dir, perdem el $\frac{17\,000\,000}{216\,000\,000} 100 \simeq 7.9\%$ de tot el que apostem. La matematització de si un joc d'apostes és just o no es basa en la idea d'esperança matemàtica i es pot trobar a qualsevol llibre de probabilitats, per exemple el llibre de K.L. Chung, *Teoría elemental de la probabilidad y de los procesos estocásticos*, Ed. Reverté, 1983.

Una manera de tenir una estimació de quant guanya el senyor que ens proposa el joc durant un dia (suposant que té la parada posada durant cinc hores i que cada hora hi juguen vint persones) és

$$5 \times 20 \times \frac{7.9}{100} \times 1\,000 \text{ ptes.} = 7\,900 \text{ ptes.}$$

El nim

Aquest conegut joc consisteix en el següent: Es posen unes quantes piles d'objectes, per exemple escuradents. Dos jugadors van traient, per torns, un cert nombre d'objectes. L'única regla és que tots els objectes retirats han de ser de la mateixa pila i com a mínim se n'ha de retirar un. Guanya el joc el jugador que agafa l'últim (o últims) objectes.

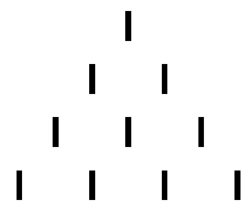
Una partida típica podria ser

PILA 1

PILA 2

PILA 3

PILA 4



Representem la situació per $(1,2,3,4)$. El jugador A retira un objecte de la PILA 4 i obtenim $(1,2,3,3)$. El jugador B retira 3 objectes de la PILA 3 i tenim $(1,2,0,3)$ i continuant

$(1,2,0,3)$	jugador B
$(1,2,0,1)$	jugador A
$(1,0,0,1)$	jugador B
$(1,0,0,0)$	jugador A
$(0,0,0,0)$	jugador B guanya.

Encara que sembla un joc en el qual és difícil saber com guanyar, usant eines matemàtiques es pot obtenir una estratègia guanyadora.

L'estratègia és la següent: s'escriuen els números en base dos i se sumen per columnes (sense emportar i com si estiguessin escrits en base 10). Un jugador pot assegurar que guanyarà la partida si aconsegueix que quan ell retira els objectes la suma de cada una de les columnes sigui parell o zero. Al nostre exemple la posició inicial és

$$\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 2
\end{array}$$

Si el jugador A retirés els quatre objectes de la quarta pila tindria una posició guanyadora. En canvi, el que ha fet és

$$\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 3 & 3
\end{array}$$

que no és una posició guanyadora. El jugador B deixa

$$\begin{array}{c|c|c} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&1&1\\ \hline 0&2&2 \end{array}$$

que ja és posició guanyadora. A partir d'aquí, A ja no podrà fer res. La partida evoluciona

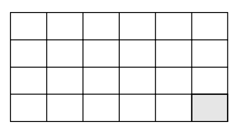
$$\begin{array}{c|c|cc} 0&0&1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1&\\ \hline 0&1&2&A \end{array} \quad \begin{array}{c|c|cc} 0&0&1&\\ 0&0&1&\\ \hline 0&0&2&B \end{array} \quad \begin{array}{c|c|cc} \hline 0&0&1&A \end{array} \quad \begin{array}{c|c|cc} \hline 0&0&0&B \end{array}$$

i el jugador B guanya. Penseu per què l'estratègia proposada és guanyadora.

Els dos jocs següents admeten estratègies guanyadores. Penseu-les o consulteu el llibre *La mathémathique des jeux*, Bibliothèque pour la science, París 1977-1990.

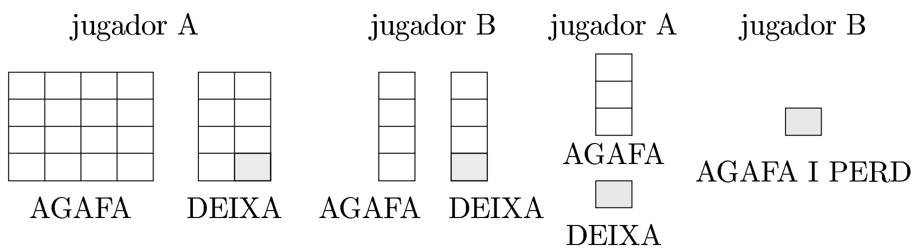
La presa de xocolata

Aquest és un joc per a dos jugadors. Es comença amb una rajola de xocolata amb una presa d'una cantonada marcada, vegeu la figura següent:



Els dos jugadors, per torns, agafen una o més preses de la rajola. L'única regla és que han de trencar la rajola seguint una línia sencera. Perd el jugador que es queda la presa marcada.

Una partida curtíssima és:



No passis de 31

Aquest és també un joc per a dos jugadors. Les regles són les següents:

El primer jugador posa sobre la taula un dau amb les cares marcades de l'1 al 6. La seva puntuació és el nombre que hi ha a la cara superior del dau.

L'altre jugador ha de fer girar el dau sobre la taula un quart de volta (la cara superior del dau serà una de les quatre cares que abans estaven en posició vertical). La seva puntuació és la suma de la puntuació anterior i el nombre que ha posat a la cara superior.

A partir d'aquí els jugadors van fent, alternativament, el mateix que ha fet el segon jugador. Perd el jugador que obtingui una puntuació superior a 31 (o qualsevol altre nombre que es fixi des del principi).