Article preparat per Armengol Gasull per al llibre *Fes Matemàtiques!* (pàgs. 91–94).
Editat pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
http://www.uab.cat/matematiques

2.19 Iteració d'aplicacions. Caos

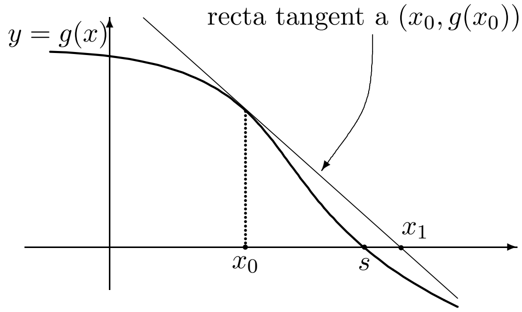
Donada una aplicació $f : X \to X$ i un punt $x_0 \in X$, s'anomena iteració de f amb inici a x_0 a la successió definida per la recurrència

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 \in X. \end{cases} \qquad (*)$$

La iteració d'aplicacions té utilitat en diversos camps: resolució d'equacions, física, economia, dinàmica de poblacions,... L'objectiu general sol ser calcular cap a on s'acosta la successió $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ en funció del valor inicial x_0. En aquesta secció estudiarem uns quants exemples de $(*)$, variant f, x_0 i l'espai X.

El mètode de Newton

Una de les maneres més efectives de resoldre equacions $g(x) = 0$ ens la dóna el mètode de Newton. La idea d'aquest mètode és molt senzilla. Anomenem s una solució de $g(x) = 0$. Aleshores, donat $x_0 \in \mathbb{R}$, volem calcular un x_1 més proper a s que x_0. La figura següent ens il·lustra la idea geomètrica.



Per a calcular x_1, busquem la recta tangent a $y = g(x)$ que passa per $(x_0, g(x_0))$. Aquesta recta és

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

El valor de x_1 es calcula buscant el valor de x que fa zero l'expressió anterior. Tenim que

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}.$$

En general, el mètode de Newton està donat per

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \\ x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i és molt usat per a resoldre equacions. Es pot veure que per a x_0 molt proper a s i per a moltes g la successió $x_0, x_1, x_2, \ldots$ convergeix cap a s i ho fa de manera que d'un pas al següent, el nombre de xifres decimals correctes de s que anem trobant es dobla aproximadament.

Per exemple, si volem trobar una solució de

$$\cos x - x = 0$$

i considerem

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = \dfrac{\cos x_n + x_n \sin x_n}{1 + \sin x_n} \\ x_0 = 0.5 \end{cases}$$

tenim que

$$x_1 = 0.7552\ldots, \qquad x_2 = 0.739141\ldots,$$
$$x_3 = 0.7390851339\ldots, \qquad x_4 \simeq x_5 \simeq s = 0.7390851332\ldots$$

Una aplicació caòtica

Un dels exemples més senzills per als quals els iterats d'una aplicació es comporten de manera quasi aleatòria és el donat per l'aplicació logística[19]

$$\begin{cases} x_{n+1} = Kx_n(1 - x_n) \\ x_0 \in [0, 1]. \end{cases}$$

Aquesta aplicació depèn d'un paràmetre $K \in \mathbb{R}$. Es pot veure que presenta un fenomen anomenat "caos"per a certs valors del paràmetre. Queda fora de l'abast d'aquest llibre donar una definició concreta del que és el caos i veure per què es dóna per a l'aplicació logística. Només comentarem que una característica que presenten tots els sistemes caòtics és el que s'anomena *dependència sensible respecte a les condicions inicials*. Aquesta propietat ens diu que petits canvis en la condició inicial tenen una repercussió gran en els valors donats per la iteració. De fet, aquesta propietat s'ha popularitzat amb el nom d'*efecte papallona*. Aquest nom prové del fet que en l'estudi dels sistemes meteorològics es presenta la dependència sensible respecte a les condicions inicials i es diu (exagerant) que una papallona que mou les ales a l'Amazònia (i, per tant, canvia una mica l'estat inicial de l'atmosfera) podria provocar un huracà a l'altre cap del món.

Per a acabar proposem un experiment musical que ens pot servir per a entendre el que és el caos. Prepareu un programa d'ordinador que faci el següent:

`Donat un valor de` $K \in [0, 4]$ `i un valor de` $x_0 \in [0, 1]$, `calculi la successió`

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$$

`fins a un cert` n `prou gran (200 o 300 per exemple). Al mateix temps que es va calculant cada` x_i`, fem que se senti durant` $\frac{1}{2}$ `segon una nota musical amb la regla següent:`

`Si`	$x_i \in \left[0, \frac{1}{7}\right)$,	`aleshores`	`la nota és`	`do`
`Si`	$x_i \in \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$,	`aleshores`	`la nota és`	`re`
`Si`	$x_i \in \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$,	`aleshores`	`la nota és`	`mi`
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
`Si`	$x_i \in \left[\frac{6}{7}, \frac{7}{7}\right]$,	`aleshores`	`la nota és`	`si`

[19] Aquesta aplicació ens dóna també un model d'evolució de la població d'una espècie; vegeu, per exemple, el llibre de J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, 1993.

Si experimenteu amb aquest programa, observareu que per a valors de K petits (< 3) obtenim, en augmentar n, una melodia monòtona. En augmentar K, la melodia que es repeteix té un període més llarg. Per a $3.83 < K < 4$, la melodia ja no segueix cap regla. Hem pogut "escoltar"el caos.

Un problema obert: la conjectura $3x + 1$

Una conjectura és una afirmació de la qual no se sap si és certa o falsa, encara que hi ha indicis que pot ser certa. Presentarem una conjectura molt famosa. Aquesta conjectura té molts noms: conjectura $3x + 1$, conjectura de Collatz, de Kakutani, de Ulam, etc. Diu el següent:

Considerem l'aplicació següent de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2}, & \text{si } x \text{ és senar,} \\ \dfrac{x}{2}, & \text{si } x \text{ és parell.} \end{cases}$$

Conjectura $3x + 1$. *Donat un $x_0 \in \mathbb{N}$ positiu qualsevol si considerem la iteració de f amb inici x_0, és a dir,*

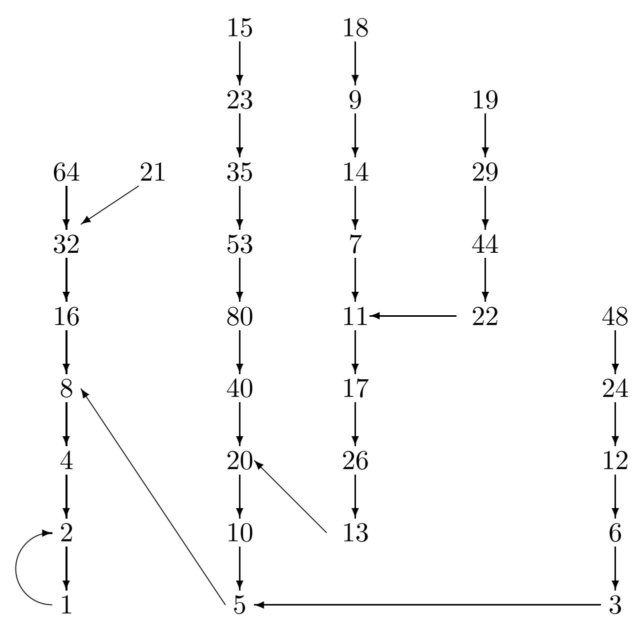
$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0, \end{cases} \tag{$**$}$$

existeix un valor m prou gran (dependent de x_0) de manera que $x_m = 1$.

En altres paraules, independentment de x_0, els iterats per a $(**)$ són

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$$

La figura següent il·lustra els iterats per als valors de x_0 més petits que 25, entre d'altres.



Hi ha matemàtics a tot el món intentant saber si la *conjectura* $3x+1$ és certa o falsa. Recentment, a l'agost del 1999 hi ha hagut un Congrés internacional a Alemanya per a discutir els avenços que s'han fet. Per exemple, se sap que és certa per a x_0 menor que $3 \times 2^{53} \simeq 2.702 \times 10^{16}$. També se sap que si existís una solució amb nombres naturals diferent de $(n, m) = (2, 1)$ per a l'equació

$$2^n = 3^m + 1,$$

aleshores la conjectura seria falsa. Una referència actual sobre el tema és el llibre de G. J. Wirsching, *The dynamical system generated by the* $3n+1$ *function*, Lecture Notes in Mathematics **1681**, Springer-Verlag, Berlín, 1998. També podem consultar l'adreça

`http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html`

És fàcil veure que la *conjectura* $3x+1$ no és certa si es considera $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Busqueu valors de x_0 negatius per als quals la successió d'iterats no acabi fent $2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$

Exemples bidimensionals

Considerem la funció f de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ coneguda com funció de Lyness donada per

$$f_a(x, y) = \left(y, \frac{a+y}{x} \right),$$

amb a un paràmetre positiu.

Agafeu un $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qualsevol i fixeu $a = 1$. Calculeu els seus iterats i trobareu una propietat curiosa. Comproveu que aquesta propietat ja no es compleix per a altres valors d'$a \in \mathbb{R}^+$.

Com a últim exemple, considerarem una aplicació del tipus anomenat Twist pertorbat. S'ha pogut demostrar que els iterats d'aquest tipus d'aplicacions presenten comportament caòtic. Considerarem

$$f_a(x, y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} & \sin(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \\ -\sin(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} & \cos(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A l'esquerra de la figura següent representem els primers 4000 iterats prenent $(x_0, y_0) = (0.3, 0)$ i $a = 1.3$; a la dreta prenem $(x_0, y_0) = (0.8, 0)$ i $a = 1.273$. Com podeu veure, el comportament dels iterats en ambdos casos és bastant imprevisible. Aquest tipus d'aplicacions apareixen quan s'estudia el moviment dels planetes.