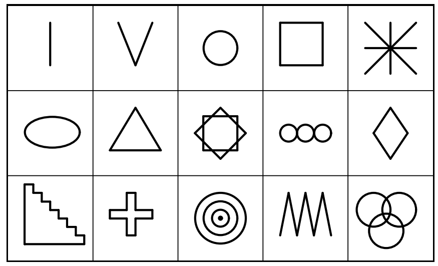
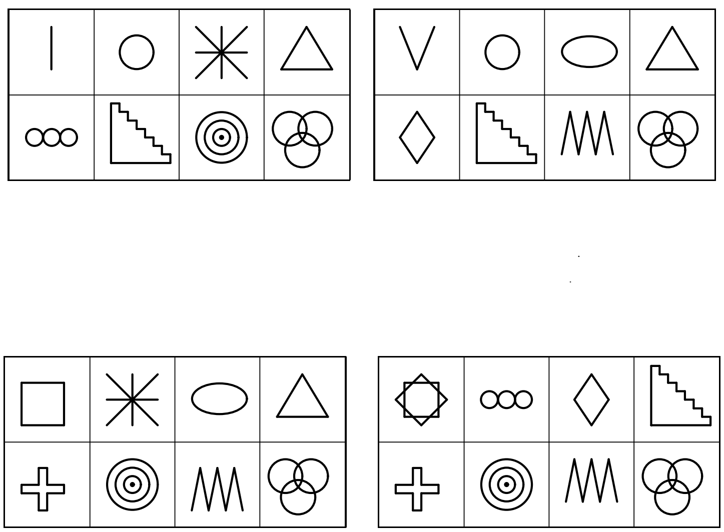
4.4 Màgia matemàtica

4.4.1. Endevinar un objecte. Construïu una carta amb quinze objectes com a la figura



Demaneu a algú que triï un dels quinze objectes. Després li demaneu que digui si l'objecte que ha triat és o no a cada una de les quatre cartes següents:



L'objecte triat s'obté fent els comptes següents: s'associa a cada una de les quatre cartes amb vuit objectes un dels números 1, 2, 4 i 8 amb la regla següent: es mira l'objecte de dalt a esquerra. Cada un d'ells indueix el número: un pal → 1, una V → 2, un quadrat → 4, una estrella de 8 puntes → 8. La suma dels números associats a les cartes on hi ha l'objecte que busquem ens dóna el nombre al qual correspon l'objecte buscat en la carta que conté tots els objectes. De fet, és millor no posar cap nombre a la carta amb els quinze objectes i numerar-los mentalment per files (el pal l'1, la V el 2, el cercle el 3,...).

4.4.2. Endevinar una carta. D'una pila de 27 cartes demanem que algú en triï una. Després li diem que les barregi totes. Agafem les 27 cartes remenades i anem repartint les cartes en tres piles (una a cada pila cada cop seguint el mateix ordre) ensenyant totes les cartes. Li preguntem a la persona que ha triat la carta que indiqui a quina pila és la seva carta. Recollim les tres piles posant la pila amb la carta al mig de les altres dues.

Repetim el mateix procediment dos cops més. Sempre la carta triada és al lloc 14è de la baralla (de fet, al lloc 5é de l'última pila que ens indica qui ha triat la carta).

Per què funciona el truc? Dissenya'n modificacions, sia amb el mateix nombre de cartes i piles però recollint la pila amb la carta no sempre al segon lloc, sia amb diferent nombre de cartes i piles.

4.4.3. Suma rapidíssima. Es preparen cinc daus amb les puntuacions següents:

Dau 1	394	592	196	493	691	295
Dau 2	564	366	465	168	861	663
Dau 3	675	576	972	378	279	873
Dau 4	636	735	438	933	537	834
Dau 5	454	355	652	553	256	751

Es diu a algú que tiri els daus i assegurem que en pocs segons direm la seva suma. El truc consisteix en el següent: suposem que obtenim

$$394,\ 366,\ 972,\ 933,\ 256$$

aleshores sumem mentalment $4+6+2+3+6=21$, calculem $50-21=29$, i el resultat és 2921.

Per què funciona el truc? Pots construir taules diferents on funcioni el mateix truc?

4.4.4. Més jocs de cartes. Demanem que algú remeni un joc de cartes i, un cop remenat, ens l'entrega i el posem a la butxaca. Aleshores li diem que digui un nombre de l'1 al 15. Nosaltres anem traient cartes de la butxaca i les anem ensenyant. En traiem unes quantes de tal manera que sumin exactament el nombre que la persona ha triat.

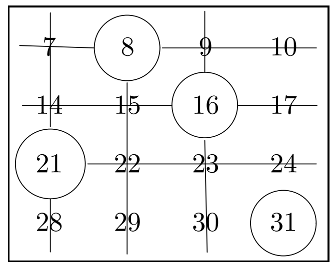
Tot i que aquest truc és molt senzill, sol fer molt d'efecte. El truc consisteix a posar-se primer quatre cartes ordenades a la butxaca, un 1, un 2, un 4 i un 8. Quan ens donen la resta de les cartes les posem a continuació de les 4 triades (normalment ningú no s'adona si d'un joc complet de cartes n'hem tret quatre). Com segueix la resta del truc?

4.4.5. Truc del calendari. Portem un calendari de tot l'any i diem a algú que agafi un quadrat 4×4 (format per 16 dies d'un mes qualsevol). Un cop l'ha triat (nosaltres no el veiem en cap moment), li diem que ens digui quin és el nombre més petit

Desembre 1999

		1	2	3	4	5
6	7	8	~~9~~	10	11	12
13	~~14~~	~~15~~	16	~~17~~	18	19
20	21	22	~~23~~	24	25	26
27	28	29	~~30~~	31		

A continuació li diem que triï un nombre qualsevol i que ratlli la seva fila i la seva columna (vegeu la figura si tria al 16). D'entre els nombres restants li diem que en triï un altre i elimini també la seva fila i la seva columna, i així un cop més. Vegeu la figura següent per a les tries $16, 8, 21$. Queda sense ratllar el 31.



Li diem que sumi els quatre números no ratllats. El resultat el podem endevinar: serà $4(x+12)$, on x és el nombre que ens havien dit. En aquest cas, $8+16+21+31 = 76 = 4(7+12)$.

4.4.6. Endevinar un número. Davant de tothom escrivim un nombre en un paper i li donem a algú per a què s'el guardi a la butxaca. Agafem una altra persona i li diem que faci les operacions següents:

- Que agafi un nombre de tres xifres no capicua.
- Que construeixi un altre nombre a partir del primer intercanviant la primera i la tercera xifres.
- Que resti el més petit dels dos al més gran dels dos.
- Que agafi el resultat de la resta i construeixi un nou nombre intercanviant la primera i la tercera xifres.
- Que sumi el nou nombre obtingut amb el resultat de la resta.

En aquest moment diem a l'altra persona que llegeixi el nombre que té guardat. Aquest nombre coincideix amb el resultat de totes les operacions. Per què?

4.4.7. Sense cap pregunta. Donem a una persona tres o quatre jocs de cartes. Li diem que les remeni bé. Aleshores, que pensi un nombre qualsevol de l'1 al 12. Un cop pensat, que vagi tirant cartes cap per amunt comptant en silenci fins que arribi a la carta que ocupa el lloc corresponent al nombre que havia pensat. Que miri el valor d'aquesta carta i a partir d'aquesta carta que compti tantes cartes com el valor indiqui fins a arribar a una altra carta, que miri el seu valor i continuï comptant, i així successivament... Per exemple, si pensa un 3 mira la tercera carta, si és un 5 tornarà a mirar la vuitena carta, si aquesta és un 12 tornarà a mirar la vintena carta i així successivament.

Nosaltres anem mirant passar les cartes, i sense preguntar res, quan estan a punt d'acabar-se totes les cartes encertem quines són les cartes en què s'està fixant. Per exemple, l'aturem i li diem: "Oi que ara et tocarà comptar tantes cartes?" Com creus que podem endevinar-ho?

4.4.8. Endevinar de nou un nombre. Demanem a una persona que pensi un nombre amb tantes xifres com vulgui (millor tres com a mínim). Després li diem que sumi totes les xifres del nombre i que calculi la diferència entre el nombre inicial i la suma de les seves xifres. Un cop fet el càlcul, li diem que ratlli una de les xifres del resultat i que ens digui la suma de les que quedin. Per exemple si pensa 1 295, hauria de fer $1\,295-(1+2+9+5)=1\,295-17=1\,278$. Aleshores, ratlla el 7 i ens diu $1+2+8=11$. Nosaltres som capaços d'endevinar el nombre que ha ratllat. Com ho fem?

4.4.9. Endevinar més nombres. Un dels trucs matemàtics més freqüents i que es basa en el domini de les equacions és el que consisteix a demanar a algú que pensi un nombre (o més d'un), que faci unes determinades operacions amb aquest (o aquests) i que ens digui el resultat. A partir d'aquest resultat, i sense més que resoldre una equació, nosaltres li podem endevinar el nombre (o nombres) que ha pensat. Posem un exemple per a fixar idees: com endevinar l'edat d'una persona. Li diem:

– Agafa el número del mes en que vas néixer.
– Multiplica'l per 4.
– Suma 5 al resultat.
– Multiplica el resultat per 50.
– Suma 1 738 al resultat (suposant que fem el truc l'any 2000; en general, el que s'ha de sumar és el nombre de l'any en curs menys 262).
– Resta-li l'any que vas néixer.

A partir del resultat podem deduir l'edat de la persona. L'explicació és la següent:

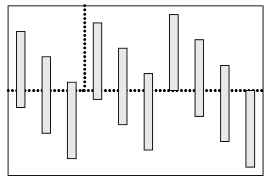
Sigui x el número del mes i suposem que la persona hagués nascut el 1980. Els resultats serien

$$\begin{aligned} x &\to 4x \to 4x+5 \to (4x+5)50 = \\ &= 200x+250 \to (200x+250)+1738 = \\ &= 200x+1988 \to (200x+1988)-1980 = \\ &= (2x)100+8; \end{aligned}$$

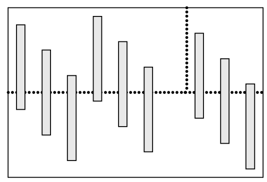
per tant, la meitat de les dues primeres xifres ens donarà el mes (x) en què va néixer la persona. Les dues segones xifres més 12, $(8+12)$ ens donaran els anys que farà la persona durant l'any 2000. Com que ja sabem el mes en què va nèixer (x), si fem el truc abans del mes x li podem dir que té dinou anys; si el fem després del mes x, li direm que en té vint. Si fem el truc el mes x, encara podrem sorprendre més la persona, ja que li direm "No sé si tens 19 o 20 anys, però sé que aquest mes és el teu aniversari."

Hi ha una versió d'aquests trucs de fer operacions amb uns certs números i a partir del resultat endevinar-los que és una mica més original. Li diem a una persona que pensi un número i que ella mateixa vagi fent-hi operacions (sumes, restes i multiplicacions, preferentment) i que ens les expliqui en veu alta. A partir del resultat li podem dir el nombre pel qual havia començat. Com ho podem fer?

4.4.10. Desaparició. Considerem la cartolina següent, on hi ha deu columnes iguals:



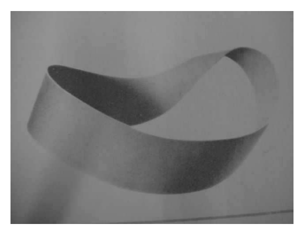
Si la retallem per la línia puntejada i la tornem a muntar posant la part superior esquerra a la part dreta i viceversa, obtenim la figura següent:

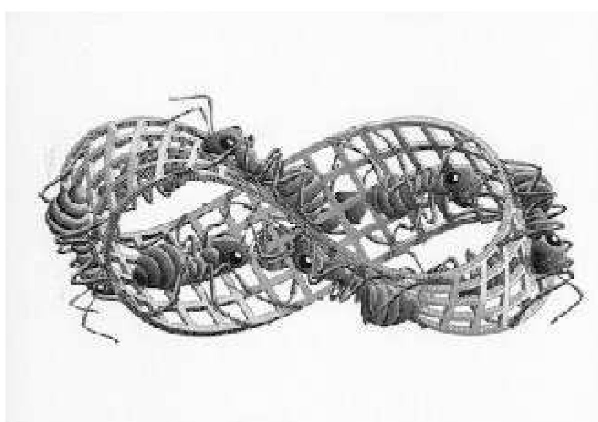


Observeu que aquesta només té nou columnes, també iguals. On és la columna que falta?

4.4.11. Paper misteriós. Agafeu una tira llarga de paper, cargoleu-la mitja volta i enganxeu les seves parts més estretes. Obtindreu una superfície que s'anomena cinta de Möbius; vegeu la figura adjunta. Experimenteu el que passa quan retalleu la cinta per la meitat llarga comparant-ho amb el que passaria si retalléssiu la cinta sense haver-la cargolat. Torneu a retallar per la meitat la cinta obtinguda.

El truc de màgia consisteix a donar a algú una cinta de Möbius molt llarga i agafar nosaltres una cinta igual de llarga (però sense estar cargolada). Aleshores, quan nosaltres la retallem pel mig, queda dividida en dues cintes més estretes; en canvi a l'altra persona li passen coses estranyes!





Reproducció d'una famosa obra del pintor holandès Mauritus Cornelis Escher (1898-1972) basada en la cinta de Möbius.

4.4.1 Explicacions

1. El truc està basat en l'expressió d'un nombre en base 2. Per exemple, $11 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 11$, i per tant l'objecte associat a l'11, és a les cartes associades a 1, 2 i 8, i no és a la carta associada al 4.

   Com construiríeu un truc similar per a endevinar un objecte entre 31 usant cinc cartes amb setze números? Penseu un truc basat en la base 3.

2. El truc està basat essencialment en la base 3. De fet, el que passa és que amb la primera pregunta, un cop recollides les cartes, assegureu que la carta buscada estarà entre la 10a i 18a; amb la informació de la segona pregunta assegureu les posicions entre 13a i 15a. L'última pregunta col·loca la carta exactament al lloc 5è de l'última pila escollida (és a dir, el lloc 14è un cop recollides les cartes).

3. Les cares de tots els daus tenen nombres de tres xifres p, q i r amb $0 \leq p, q, r \leq 9$ naturals. De fet, el nombre és $p \cdot 100 + q \cdot 10 + r$.

   Donat el dau i-èsim $i = 1, 2, \ldots, 5$ posem a cada una de les seves sis cares, nombres de la forma
   $$(K_i - r)100 + q_i 10 + r$$
   on r pot ser diferent a cada cara.

   Es pren $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 10n$ on n és 1, 2, 3, ó 4 i $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 = 50 - n$. Aleshores, si tirem els cinc daus, obtindrem els cinc números següents

   dau 1: $(K_1 - a)100 + q_1 10 + a$ per un cert a
   dau 2: $(K_2 - b)100 + q_2 10 + b$ per un cert b
   ... ...
   dau 5: $(K_5 - e)100 + q_5 10 + e$ per un cert e.

   Sumant els nombres i dient $s = a + b + \cdots + e$, tenim que la suma val
   $$\begin{aligned}(K_1 + K_2 + \cdots + K_5 - s)100 + (q_1 + q_2 + \cdots + q_5)10 + s = \\ = (50 - n - s)100 + (10n)10 + s = (50 - s)100 + s\end{aligned}$$
   i per tant tenim una explicació de per què funciona el truc. A la taula de valors s'ha pres $n = 3$.

4. Com ja haureu deduït, el que s'ha de fer és expressar el nombre que ens han dit en base 2 i treure les cartes que corresponen als llocs on hem obtingut un 10. Per exemple, si ens diuen 10, $10 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1010_{2)}$. Per tant, hem de treure la segona i la quarta cartes.

5. Recordem que x denotarà la data més petita del calendari. És fàcil observar que el quadrat de 16 números triat al calendari serà
   $$\begin{array}{cccc} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+7 & x+8 & x+9 & x+10 \\ x+14 & x+15 & x+16 & x+17 \\ x+21 & x+22 & x+23 & x+24 \end{array}$$

El procediment explicat per a triar els quatre nombres fa que s'hagi de triar un número de cada fila i un de cada columna; per tant la suma dels triats serà $4x + (8 + 16 + 24) = 4(x + 12)$.

En aquest cas, es pot entendre encara millor si es construeix una taula més general. Ho farem amb un exemple. Observeu que si prenem dos blocs de cinc números $\{1, 0, 3, 2, 4\}$ i $\{4, 2, 1, 5, 0\}$ i construïm les seves sumes, tenim

	1	0	3	2	4
4	**5**	4	7	6	8
2	3	2	**5**	4	6
1	2	**1**	4	3	5
5	6	5	8	**7**	9
0	1	0	3	2	**4**

Ara, si triem, com abans, 5 dels 25 números generats (per exemple, els marcats $5 + 5 + 1 + 7 + 4$) és a dir un de cada fila i un de cada columna, la seva suma serà igual a la suma dels deu números que generen la taula

$$5 + 5 + 1 + 7 + 4 = 22 = (1 + 0 + 3 + 2 + 4) + (4 + 2 + 1 + 5 + 0).$$

En el primer cas que estudiàvem, els generadors de la taula eren $\{x, x + 1, x + 2, x + 3\}$ i $\{0, 7, 14, 21\}$ per tant la suma era

$$(x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3)) + (0 + 7 + 14 + 21) = 4x + 48 = 4(x + 12).$$

6. Veurem que el resultat de totes les operacions és 1 089, independentment del nombre inicial que triem. Sigui
$$p100 + q10 + r$$
amb $0 \leq p, q, r \leq 9$ el nombre triat. Com que no és capicua $p \neq r$. Construïm l'altre nombre $r100 + q10 + p$. Suposem, per exemple, que $p > r$. Aleshores,
$$\begin{aligned} &p100 + q10 + r - (r100 + q10 + p) = \\ &\qquad = (p - r)100 + (r - p) = (p - r - 1)100 + 9 \cdot 10 + (10 + r - p) \end{aligned}$$
on $1 < 10 + r - p < 9$. Per tant, les xifres de la resta són $p - r - 1$, 9 i $10 + r - p$. Fem l'última suma
$$\begin{aligned} &((p - r - 1)100 + 9 \cdot 10 + (10 + r - p)) + ((10 + r - p)100 + 9 \cdot 10 + p - r - 1) = \\ &\qquad = 9 \cdot 100 + 18 \cdot 10 + 9 = 1089, \end{aligned}$$
independentment de les xifres del primer nombre, p, q i r.

7. Aquest truc és essencialment diferent de la resta. Només podríem assegurar que funcionaria sempre si disposéssim d'infinites cartes (cosa impossible). En aquest cas, també és difícil donar una explicació rigorosa.

   Començarem amb un cas més senzill: Suposem que tenim una moneda i l'anem tirant molts cops fent els càlculs següents: Cada cop que surt una cara sumem 1, mentre que cada cop que surt una creu restem 1. Es pot veure que com més gran és el nombre de cops que tirem la moneda, més probable és que els nostres comptes passin pel valor 0.

El nostre joc de màgia es basa en una propietat similar. El que fem nosaltres (independentment del que faci la persona a la qual fem el truc) és pensar un nombre i seguir les mateixes regles que ell a l'hora de contar les cartes. Si en un cert moment els dos arriben a la mateixa carta, per sempre més anirem seguint les mateixes cartes.

Si pensem una mica, veurem que una manera diferent de mirar-se aquesta situació és que a cada tria que fem els dos, la puntuació difereix com a molt en 11 punts (l'un tria 1 i l'altre 12 o viceversa). Aleshores, podem pensar que el que fem cada cop és sumar un nombre d'1 a 11 si l'espectador arriba a una carta més alta que nosaltres; restar un nombre de 1 a 11, si som nosaltres els que arribem a la carta més alta o no sumar res si arribem a una carta amb el mateix valor. En altres paraules és com si tiréssim un dau trucat de 23 cares (valors $-11, -10, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 10, 11$). El problema es fa més difícil pel fet que no tots els valors surten en les mateixes proporcions. Es pot veure que com més cops repetíssim el procés, més fàcil seria que obtinguéssim un 0 a la suma total (això equivaldria a que els dos hauríem arribat a la mateixa carta).

8. Suposem que el nombre té 4 xifres, i és

$$1000a + 100b + 10c + d,$$

amb $0 \leq a, b, c, d \leq 9$. L'operació que li demanem és

$$\begin{aligned} &1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = \\ &\qquad = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c) \end{aligned}$$

i per tant el resultat sempre és múltiple de 9. Ara recordem que les xifres d'un nombre múltiple de 9 sempre sumen un múltiple de 9; per tant, si ens ha eliminat una, la que ha eliminat és el nombre que falta al nombre que ens diu per a arribar a ser un múltiple de 9. A l'exemple ens diu 11; per tant, la xifra eliminada ha de ser $18 - 11 = 7$.

Aquest truc té un petit problema: si la persona ratlla un 0 o un 9, el nombre que ens dirà ja és un múltiple de 9. En aquest cas ens hem de limitar a dir que ha ratllat un 0 o un 9 i que no podem precisar més.

9. Senzillament, nosaltres prenem com x el número que la persona pensa i fem mentalment les operacions que ella va inventant, però amb x. Al final de tots els càlculs, arribem a un valor $ax+b$. Quan ens digui el resultat, resolent l'equació obtindrem x. Les divisions també es poden permetre, però compliquen el càlcul mental. De totes maneres hi ha un cas en que se'ns pot presentar un problema (el cas $a = 0$ en la notació de dalt). Suposem que la persona a la qual fem el truc fa les operacions següents:

   - Tria un número: 5, (per a nosaltres, x).
   - El dobla: 10, (per a nosaltres, $2x$).
   - Li suma 3: 13, (per a nosaltres, $2x + 3$).
   - El multiplica per 3: 39, (per a nosaltres, $6x + 9$).
   - Li suma 9: 48, (per a nosaltres, $6x + 18$).
   - El divideix per 6: 8, (per a nosaltres, $x + 3$).
   - Li resta el número pensat: 3, (per a nosaltres, 3).

Si en aquest moment decideix parar les operacions, estem perduts ja que no podrem recuperar mai x. El que hem de fer en aquesta situació és dir: “No cal que continuïs més, el resultat de les teves operacions és 3”. Això encara sorpendrà més la persona, ja que no ens haurà dit cap nombre.

10. A la primera figura hi ha 10 columnes d'altura 9, mentre que a la segona figura hi ha 9 columnes d'altura 10. Es poden construir cartolines amb altres nombres de columnes i amb altures diferents. Sempre n columnes d'altura $n-1$ unitats. La idea de com col·locar-les es veu més clara si es fa primer una taula només amb les seves llargades. Així, la primera figura correspon a

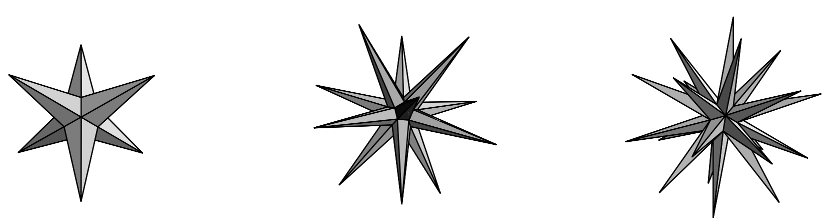
7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
2	5	8	1	4	7	0	3	6	9

mentre que la de la segona és:

8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
2	5	8	1	4	7	0	3	6	9

Observeu que la columna $0,0$ correspon al lloc on no hi ha columna.

11. Creiem que no cal donar cap explicació.



Cub, dodecàedre i icosàedre estrellats.