2.21 Matemàtiques i música

Tothom ha sentit a dir que les matemàtiques i la música estan molt relacionades. Per a alguna gent aquesta relació es queda en un nivell descriptiu. Per exemple, si diem 1 al temps de durada d'una negra, aleshores tenim

NOTA	TEMPS
Rodona	4
Blanca	2
Negra	1
Corxera	1/2
Semicorxera	1/4
Fusa	1/8
Semifusa	1/16
⋮	⋮

Si considerem les notes amb punt, tenim que la durada d'una nota amb punt és igual a $\frac{3}{2}$ de la durada de la mateixa nota sense punt. Un altre exemple de relació podria ser el següent. Posem les notes blanques del piano i la seva separació en nombre de tons:

$$\ldots \text{SI} \overset{\frac{1}{2}}{\leftrightarrow} \text{DO} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{RE} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{MI} \overset{\frac{1}{2}}{\leftrightarrow} \text{FA} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{SOL} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{LA} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{SI} \overset{\frac{1}{2}}{\leftrightarrow} \text{DO} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{RE} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{MI} \ldots$$

Si prenem només de DO a DO, tenim la successió de semitons: $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$. Donada una nota X recordem que $X^{\#}$ denota la nota que té un semitò més que X, i $X^{\flat}$ la nota que té un semitò menys que X. Per exemple, $\text{SI}^{\#} = \text{DO}$, $\text{FA}^{\flat} = \text{MI}$, $\text{RE}^{\#} = \text{MI}^{\flat}$.

Ara, si prenem qualsevol nota i busquem les set notes següents seguint els increments de tons $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$, obtindrem vuit notes (la primera igual a l'última), que sonaran de manera similar a les tecles blanques del piano, però amb una tonalitat diferent. Si prenem SOL per a començar, tenim

$$\text{SOL} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{LA} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{SI} \overset{\frac{1}{2}}{\leftrightarrow} \text{DO} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{RE} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{MI} \overset{1}{\leftrightarrow} \text{FA}^{\#} \overset{\frac{1}{2}}{\leftrightarrow} \text{SOL}.$$

És a dir, que tenim les notes de l'anomenada tonalitat de Sol Major.

L'objectiu d'aquesta secció és intentar aprofundir una mica més en aquesta relació entre música i matemàtiques. Més concretament, donarem dues possibles explicacions de per què la base de la música que escoltem és la divisió d'una octava en dotze intervals, és a dir, considerar les notes:

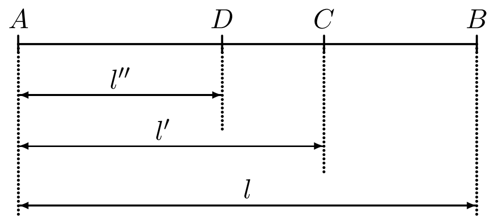
$$\text{DO}, \text{DO}^{\#}, \text{RE}, \text{RE}^{\#}, \text{MI}, \text{FA}, \text{FA}^{\#}, \text{SOL}, \text{SOL}^{\#}, \text{LA}, \text{LA}^{\#}, \text{SI}, \text{DO}.$$

Aquestes explicacions s'han tret del treball de Joan Girbau, professor del Departament de Matemàtiques de la UAB, "Les matemàtiques i les escales musicals", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 18* (1985), 3-27.

Començarem amb unes consideracions preliminars. Identificarem un so amb la seva freqüència, és a dir, el seu nombre de vibracions per segon.

Si prenem una corda de guitarra de longitud l, aquesta emet un so de freqüència $\frac{C}{l}$, on C és una certa constant real que depèn del material de la corda.

Si ara prenem dos punts més a la corda, com a la figura



complint $\frac{l}{l'} = \frac{l'}{l''}$ observarem que si anem fent sonar la corda a l'aire, la corda de longitud l' posant el dit a C i la corda de longitud l'' posant el dit a D, consecutivament sembla que la distància musical entre el primer so i el segon coincideix amb la distància entre el segon i el tercer. És per això que quan vulguem comparar dos sons, el que farem serà dividir les seves freqüències, en lloc de restar-les.[20]

De fet, donats dos sons u i v tals que $\frac{u}{v}$ ó $\frac{v}{u}$ és un nombre natural de la forma 2^k (és a dir, la freqüència d'una d'elles és 2^k cops la freqüència de l'altra), es diu que els dos sons corresponen a la mateixa nota, però que una és k octaves més alta que l'altra.

Donat un conjunt de sons $S \subset \mathbb{R}$, per tal de fer música, és raonable imposar que si $u \in S$, aleshores $2u$ i $\frac{u}{2}$ també pertanyen a S. Una altra condició que també seria raonable[21] és que $3u$ i $\frac{u}{3}$ també fosin elements de S. Malauradament, no és difícil veure que si mirem quants sons hi hauria entre u i $2u$ imposant les dues condicions esmentades, veuríem que haurien de ser infinits sons (!). És per això que, encara que musicalment serien desitjables, a la pràctica és impossible compaginar les dues condicions. Les dues explicacions donades al treball citat consideren dues maneres diferents d'imposar condicions semblants a la segona condició esmentada.

Primera explicació: escales cromàtiques temperades

Considerem una nota base u. En quants intervals iguals[22] hem de dividir $[u, 2u]$ per tal que $\frac{3u}{2}$ sigui al més proper possible a un dels sons que apareixen a la partició?

En altres paraules: dividim $[u, 2u]$ en m intervals iguals:

$$u < 2^{\frac{1}{m}}u < 2^{\frac{2}{m}}u < 2^{\frac{3}{m}}u < \cdots < 2^{\frac{m-1}{m}}u < 2u.$$

Per a quins valors de m existeix un valor n tal que $2^{\frac{n}{m}}$ sigui una bona aproximació de $\frac{3}{2}$?

Una resposta a l'anterior qüestió és la següent: Prenem x com la solució de l'equació $2^x = \frac{3}{2}$. Obtenim que $x = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2} = 0.584962500721\ldots$ El que hem de buscar són nombres racionals que aproximin bé a x i considerar els seus denominadors. Ja hem abordat aquest problema a la secció 2.2. Si calculem la successió de fraccions contínues que tendeixen a x, obtenim

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}, \ldots$$

[20]Des d'un punt de vista més tècnic, podríem definir la distància entre dos sons de freqüències u i v com $d(u,v) := \left|\log\left(\frac{v}{u}\right)\right|$. Aquesta noció es correspon amb una noció més matemàtica de distància. Per exemple, si $u = v$ aleshores $d(u,v) = 0$.

[21]Per a fixar idees, suposem que $u = 300$ vibracions per segon (v/s). Aleshores, si es compleixen les dues condicions imposades, els sons de $\ldots, 100, 150, 200, 300, 400, 450, \ldots v/s$ (i molts més) serien de S i tots alhora sonarien bé. Hi ha una explicació més tècnica basada en el fet que tot so de freqüència u, segons la teoria de Fourier, descompon en sons sinusoïdals de freqüències $u, 2u, 3u, 4u, 5u, \ldots$ i si es complissin les dues condicions, els quatre primers harmònics serien a S.

[22]Iguals en el sentit de distància que hem donat. Així, per exemple, v divideix l'interval $[u, 2u]$ en dues parts iguals si $\frac{v}{u} = \frac{2u}{v}$, és a dir $v = \sqrt{2}u$.

D'aquesta successió concloem que si hem de dividir l'interval de freqüències u i $2u$ amb sons equidistants (aquesta és la definició d'escala cromàtica temperada), que tingui un so proper a $3\frac{u}{2}$, i amb un nombre no gaire gran ni gaire petit de sons, potser triaríem $m = 12$. Aquest és precisament el número d'intervals en què es divideix una octava per a fer música.

La divisió en dos intervals o en cinc intervals donaria música més senzilla (però diferent). La divisió en 41, 53, 306, ... donaria lloc a música molt més complexa. Per a acabar, voldríem comentar que al treball de J. Girbau en què ens basem també es donen dues aproximacions de x, que no surten en usar la tècnica de les fraccions contínues: $\frac{4}{7} = 0.571\ldots$ i $\frac{17}{29} = 0.5862\ldots$ que donarien lloc a altres solucions del problema.

Segona explicació: escala pitagòrica cromàtica

Un segon intent d'aconseguir que donat un so $u \in S$, també siguin a S, $3u, 9u, \ldots, 3^l u, \ldots$ per a tota u és el següent: Fixtem un so u i imposem que siguin de S els sons següents: $u, 3u, 9u, \ldots, 3^k u$ i tots els seus dobles i meitats.

A la taula següent posem quins sons estarien entre u i $2u$ en funció del valor de k que considerem. També diem quina és la distància màxima i mínima entre els sons en funció de k. Noteu que per a aquestes distàncies es compleix $\frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^5}{3^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^7}{2^{11}}$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^7/2^{11}$							•	•	•	•	•
$3^2/2^3$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^9/2^{14}$									•	•	•
$3^4/2^6$				•	•	•	•	•	•	•	•
$3^{11}/2^{17}$											•
$3^6/2^9$						•	•	•	•	•	•
$3/2$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^8/2^{12}$								•	•	•	•
$3^3/2^4$			•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^{10}/2^{15}$										•	•
$3^5/2^7$					•	•	•	•	•	•	•
2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Distància mínima	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$
Distància màxima	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$

Sons entre u i $2u$, ometent la u multiplicant.

Com podem observar, hi ha uns valors concrets de $k \leq 11$ per als quals els sons s'espesseixen més (la distància màxima disminueix) aquests són $k = 2$, 4, 6 i $k = 11$. De nou la divisió de $[u, 2u]$ en dotze intervals (correspon a $k = 11$) apareix com un cas especial. De fet, per a $k = 11$ l'escala s'uniformitza, ja que la distància màxima i la distància mínima són quasi iguals: $2^8/3^5 \simeq 1.053$ i $3^7/2^{11} \simeq 1.068$.

Comparació de les dues escales

Veurem que els sons corresponents a $k = 11$ de la secció anterior són (aproximadament) els mateixos sons que s'obtenen en considerar l'escala cromàtica temperada de dotze intervals.

Per tal de comparar les dues escales fixarem u per a fer que la nota que s'anomena LA (tercera) tingui 440 vibracions per segon.[23] A l'escala temperada això es fa prenent u (v/s del DO) per tal que $\frac{3^3}{2^4}u = 440$. A l'escala cromàtica s'ha de prendre u tal que compleixi $2^{\frac{9}{12}}u = 440$. Com es pot veure, les diferències de v/s en les dues escales són molt petites.

	E. temperada	E. cromàtica
DO	261.6	260.7
DO$^{\#}$	277.2	278.4
RE	293.7	293.3
RE$^{\#}$	311.1	313.2
MI	329.6	330
FA	349.2	347.6
FA$^{\#}$	370	371.2
SOL	392	391.1
SOL$^{\#}$	415.3	417.7
LA	440	440
LA$^{\#}$	466.2	469.9
SI	493.9	495
DO	523.2	521.5

Vibracions per segon prenent u en cada cas
per a obtenir 440 v/s pel LA

[23] El primer diapasó que es va utilitzar a l'Òpera de París el 1699 donava una nota de freqüència de 404 vibracions per segon. Durant el segle *XVIII* va haver-hi grans diferències i es va tendir a anar elevant la freqüència del LA tercera. El 1879 es va fixar aquesta nota en 435 v/s. El 1939 es va tornar a pujar a 440 v/s. Durant alguns anys van anar convivint les 435 v/s amb les 440 v/s, encara que aquesta última xifra s'ha imposat definitivament.