

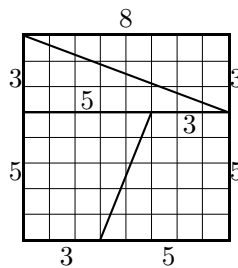


4.1 Passatemps matemàtics

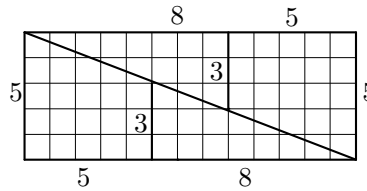
Aquesta selecció de problemes i els tres temes següents han estat preparats per Armengol Gasull i Embid, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 29 09, e-mail: gasull@mat.uab.es.



- 4.1.1. Quadrat perdut.** Considerem un quadrat 8×8 i el dividim en quatre trossos com a la figura:



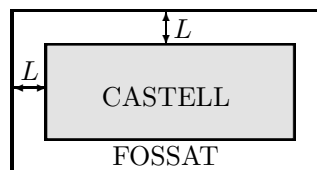
Aquests trossos es tornen a muntar fent un rectangle de 5×13



Ha aparegut un quadrat nou! D'on ha sortit?

Fes una construcció semblant partint d'un quadrat 13×13 fent les divisions de 5 i 8. Observeu que els números 3, 5, 8, 13 que surten en aquestes construccions són els que s'estudien al problema 3.5.11 i estan donats per la recurrència $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ amb $X_0 = X_1 = 1$. Relacionem el quadrat aparegut amb la propietat $X_{n+1}^2 - X_n X_{n+2} = (-1)^{n+1}$.

- 4.1.2. Saltar un fossat.** Hi ha un castell rectangular, envoltat per un fossat d'amplada L com a la figura:



Si disposeu de dos taulons d'una longitud de 10 metres cadascun, quina és la màxima L de manera que pugueu passar el fossat usant els taulons? I si disposeu de cinc taulons de la mateixa longitud?

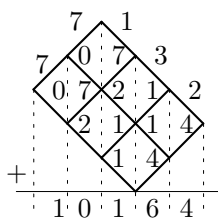
4.1.3. Una altra manera de multiplicar. Per a molts de nosaltres multiplicar està associat a saber les taules de l'1 al 9 i a conèixer com ordenar els càlculs d'una certa manera. És sorprenent adonar-se que es pot multiplicar dos números qualssevol només sabent fer dobles, meitats i sumes. Vegem com fer-ho amb un exemple.

Multiplicació de $77 \times 132 = 10\,164$

77*	132	132
38	264	——
19*	528	528
9*	1 056	1 056
4	2 112	——
2	4 224	——
1*	8 448	+8 448
		10 164

Observeu que el mètode consisteix a fer dues columnes: l'una de meitats sense decimals (normalment la del nombre més petit), i l'altra de dobles. El resultat s'obté sumant els dobles corresponents als nombres senars de la primera columna. Per què funciona el mètode? Per cert, aquest mètode ha estat usat a diferents lloc del món, en particular a l'antic Egipte.

Hi ha una altra manera de multiplicar, encara avui usada a alguns llocs d'Àfrica, que té un fonament similar a la que nosaltres usem i que il·lustrem a la figura següent:



4.1.4. Problemes de pesos i mesures. Un problema clàssic (que ha sortit fa poc en una pel·lícula d'acció nord-americana) és el següent: tenim tres recipients de 8, 5 i 3 litres, el primer, ple de líquid, i els altres dos, buits. Com omplir els dos recipients grans amb 4 litres cadascun sense utilitzar cap altre recipient? Una solució és la següent:

8 l	5 l	3 l
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Busqueu una solució amb menys moviments.

Podeu fer el mateix amb els recipients següents:

12 l, 7 l i 5 l ?

10 l, 6 l i 4 l ?

Alguns problemes relacionats són els següents:

- Us trobeu a la vora d'un riu amb dues galledes, una de 5 l i una altra de 3 l. Com aconseguiríeu 1 l, 2 l, 3 l, 4 l, 5 l, 6 l, 7 l i 8 l exactament?
- Com mesurariéu 9 minuts amb dos rellotges de sorra, un de 7 minuts i un altre de 4 minuts?
- Una companyia d'autobusos té la norma següent: els paquets que no sobrepassin els 4 metres de longitud no paguen suplement. Com aconseguiríeu pujar a un autobús d'aquesta companyia amb una canya de pescar (rígida i no desmuntable) de 5 metres de llarg, sense pagar suplement?
- 3 botigues s'han de repartir 21 barrils de vi, dels quals 7 són plens, 7 mig plens i 7 buits. Com faríeu la repartició de manera que cada botiga tingués el mateix nombre de barrils i la mateixa quantitat de vi?
- Tenim deu piles amb deu monedes cada pila. Totes les monedes són indistingibles externament. Hi ha una pila on cada moneda pesa 9 grams, mentre que cada una de les altres 90 monedes pesa 10 grams. Com identificaríeu quina és la pila en què les monedes pesen menys fent una sola pesada en una bàscula?
- Com ho faríeu per a pesar exactament qualsevol quantitat entera entre 1 kg i 27 kg usant una balança amb 2 plats i només 4 pesos, els d'1kg, 3 kg, 9 kg i 27 kg? Es poden posar pesos als dos costats de la balança.
Amb només 3 pesos, de 2 kg, 6 kg i 18 kg, també es pot determinar quant pesa un objecte que té un pes enter entre 1 kg i 27 kg. Com ho faríeu?

4.1.5. Estratègia sorprenent. Explicarem un joc que apareix en diferents llocs (al carrer, als concursos de TV, etc.) amb diferents presentacions i que té una estratègia sorprenent. Suposem que tenim tres gobelets de cap per avall en un dels quals hi ha amagat un premi. Ens demanen que triem un d'ells. Un cop l'hem triat la persona que ha amagat el premi ens diu el següent: "Jo sé en quin dels tres gobelets hi ha el premi i per a facilitar-te la tria et destaparé un dels dos gobelets que no has triat (i en destapa un dels dos, evidentment un sense premi)". Aleshores et pregunta si vols canviar la teva tria de gobelet.

Explica per què et convé més canviar de gobelet que no mantenir-te amb el que haves triat de bon començament. De fet, raona per què amb aquesta estratègia jugant moltes partides guanyaràs el doble de premis que sense canviar de gobelet. Si no hi trobes cap explicació, fes primer unes quantes partides amb un company per a convence't.

4.1.6. Quadrats màgics. Un quadrat màgic és una col·lecció de n^2 nombres naturals diferents posats en un quadrat de manera que la suma de totes les columnes, la de totes les files i la suma de les dues diagonals és un valor constant K , anomenat la constant del quadrat.

Un dels més antics que es coneix (construït segles abans de Crist a Xina i a l'Índia) és el següent d'ordre 3, amb constant $K = 15$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

De fet, l'estructura general d'un quadrat màgic de mida 3 amb constant $K = 3x$ és

$x + y$	$x - (y + z)$	$x + z$
$x - (y - z)$	x	$x + (y - z)$
$x - z$	$x + y + z$	$x - y$

on x , y i z són nombres naturals tals que tots els resultats del quadrat siguin positius. Intenteu construir un quadrat màgic 3×3 de forma que tots els seus nombres siguin primers. Com a pista direm que hi ha un quadrat màgic d'aquest tipus amb constant 177, en el qual el primer més petit és 5 i el més gran 113.

Un quadrat famós, que apareix al gravat d'Albert Durer, *La Melencolia I*, és

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Les dues caselles centrals de l'última fila indiquen l'any 1514, en el qual l'obra va ser gravada. La constant d'aquest quadrat és $K = 34$.



Fragment de l'obra de Durer.

Expliqueu com aconseguir un quadrat màgic de mida 4 amb constant K qualsevol nombre més gran que 34 fent modificacions al quadrat de Durer (si $K - 34$ no és múltiple de 4, els quadrats màgics obtinguts poden tenir alguna xifra repetida).

Observeu que el quadrat màgic de Durer té moltes altres propietats: 34 surt com a suma de les 4 caselles centrals, com a suma dels quadrats 2×2 de les cantonades, etc.

Descobreix quina propietat fa especial el següent quadrat màgic de constant 264

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

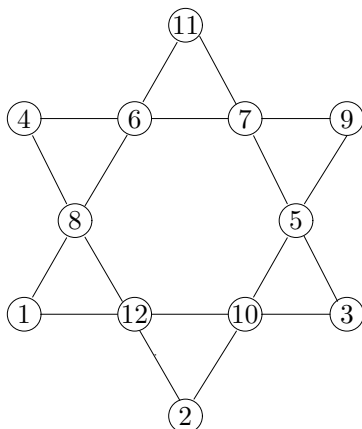
No es coneix cap mètode per a construir quadrats màgics per a qualsevol n parell, però sí que n'hi ha per a n senar. A la figura següent s'il·lustra una construcció per a $n = 5$.

			<u>5</u>				
		<u>4</u>		<u>10</u>			
	3		9		15		
	2		8		14	20	
1		7		13		19	25
	6		12		18		24
		11		17		23	
			<u>16</u>		<u>22</u>		
				<u>21</u>			

3	<u>16</u>	9	<u>22</u>	15
20	8	<u>21</u>	14	2
7	25	13	1	19
24	12	<u>5</u>	18	6
11	<u>4</u>	17	10	23

Construïu un quadrat màgic 7×7 .

Hi ha molts d'altres problemes similars als dels quadrats màgics. Per exemple, a la figura següent hi ha una estrella màgica amb els números $1, 2, 3, \dots, 12$.



Observa que la suma de tots els nombres alineats és 26. Sabries construir una estrella màgica amb els mateixos nombres però de manera que la suma de les 6 puntes de l'estrella també fos 26?

4.1.7. Al voltant del tres en ratlla. Ens proposen el següent joc: Tenim una llista dels números de l'1 al 9. Hi ha dos jugadors, l'un amb fitxes blanques i l'altre amb fitxes negres. Els jugadors van cobrint alternativament els nombres amb les seves fitxes. Quan un nombre és cobert, ja no es pot tornar a cobrir. Guanya el primer jugador que obtingui exactament 15 amb tres fitxes (no val obtenir 15 amb només dues fitxes).

Expliqueu com el quadrat màgic 3×3 donat al problema anterior pot ser utilitzat per a obtenir una bona estratègia de joc.

Un joc semblant és el següent: de la llista de paraules

PALS, BATA, TRES, PRIOR, MÚSIC, BIT, CAMARA, MELÓ, PEU

dos jugadors van triant alternativament una paraula cada un. Guanya el primer jugador que tingui tres paraules amb la mateixa lletra.

Expliqueu com dissenyar una bona estratègia de joc a partir d'un joc de tres en ratlla associat. Inventeu grups diferents de nou paraules amb propietats semblants.

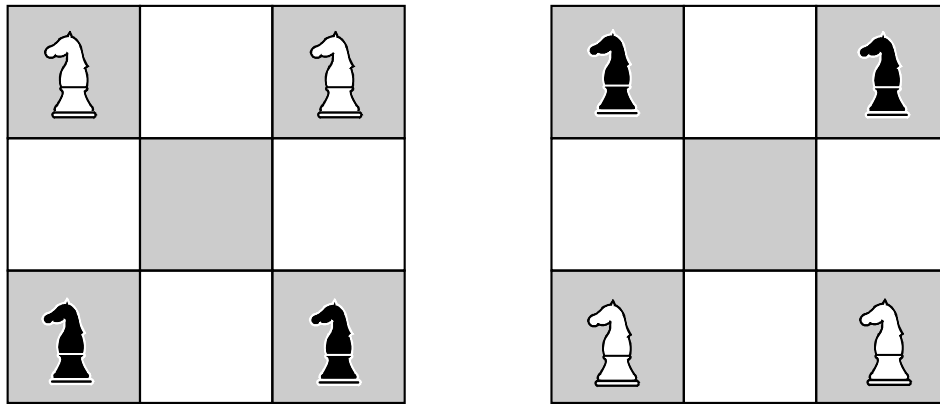
4.1.8. Creuament d'un riu. Els tres problemes següents són coneguts des de fa molt temps.

- Un barquer vol passar a l'altra banda d'un riu a un llop, una cabra i un sac de cols, però la seva barca és tan petita que només l'admet a ell i una de les tres coses. Com pot fer-ho sense deixar en cap moment soles les parelles: llop-cabra, cabra-sac de cols?
- Un regiment vol passar un riu molt profund, però no hi ha pont. De cop veuen dos nens jugant amb una barca molt petita. Com ho faran per a passar el riu utilitzant aquesta barca, si sabem que la barca només pot aguantar el pes dels dos nens o d'un sol soldat?

-

- Tres marits gelosos es troben amb les seves mullers a una banda d'un riu. Volen passar a l'altra banda i disposen d'una barca en la qual només hi caben dues persones. Com s'ho faran per a passar els sis a l'altra banda del riu amb la condició que cap dona es quedi mai en companyia d'un altre home sense la presència del seu marit.

4.1.9. Cavalls d'escacs. Tenim situats quatre cavalls d'escacs (dos de blancs i dos de negres) en un taulell 3×3 com a la figura. Quin és el nombre mínim de moviments, seguint les regles dels escacs, per tal de que els blancs i els negres intercanviïn les seves posicions?



I si el taulell és de mida 3×4 i hi ha tres cavalls blancs i tres cavalls negres a les bandes d'amplada 3?

4.1.10. Herència conflictiva. Un pastor en morir posseïa un ramat de 23 ovelles. El seu testament especificava que deixava tots els seus bens als seus tres fills de la manera següent: la meitat de tots els seus bens per al fill gran, la tercera part per al fill mitjà i la vuitena part per al fill petit. Els germans no es posaven gens d'acord en com repartir-se les ovelles, ja que no en volien matar i trossejar cap. La solució els la va donar un amic seu que passava per allà amb un ramat d'ovelles. Els va dir: "Jo us regalo una de les meves ovelles. Així en teniu 24. Si us les repartiu d'acord amb els desitjos del vostre pare, en tindreu $24/2 = 12$, $24/3 = 8$ i $24/8 = 3$. Com veieu, heu agafat $12 + 8 + 3 = 23$ ovelles; per tant, en sobra una que és la meva." Se la va tornar a emportar i tots tan contents. Què ha passat?