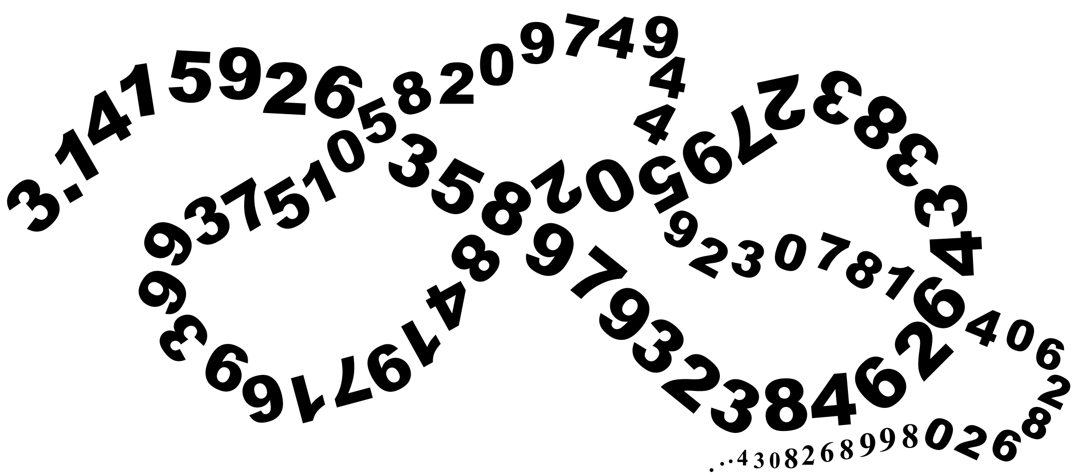
2.2 El número π. Diferents algorismes de càlcul

L'objectiu d'aquesta secció és donar diversos algorismes per a calcular π, comparant la seva velocitat de convergència.

El número π es defineix com el quocient entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre. La notació π va ser usada per primer cop per William Oughtred (1574-1660) i pot provenir de la paraula grega $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\xi$ (perímetre) usada per Arquimedes per a designar la longitud de la circumferència. La notació es va consolidar a partir dels treballs de Leonhard Euler de 1737.

Al llarg de la història hi ha hagut molts intents de calcular-lo. A continuació resumim alguns resultats d'aproximació; en cadascun subratllem els decimals correctes.

- Babilonis (2000 a.C.): $3 + \frac{1}{8} = \underline{3.1}25$.
- Egipcis (2000 a.C.): $(\frac{16}{9})^2 = \underline{3.1}6\ldots$.
- Xinesos (1200 a.C.) i a la Bíblia (550 a.C.): $\underline{3}$.
- Arquimedes (250 a.C.): $\underline{3.141}85$. També va provar que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.
- Tsu Txung Txih ($\simeq 480$): $\frac{355}{113} = \underline{3.141592}9\ldots$.
- Viète (1593): $\underline{3.141592653}6$.
- Euler (1707-1783): $\frac{103993}{33102} = \underline{3.141592653}0\ldots$
- De Lagny (1719): 112 decimals exactes calculats.
- Rutherford (1824): 152 decimals exactes calculats.
- W. Shanks (1874): 527 decimals exactes calculats.
- Ramanujan[1]: $\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \underline{3.141}6\ldots$, $(102 - \frac{2222}{22^2})^{1/4} = \underline{3.1415926}5\ldots$.
- Kanada i Takahashi (1997): 51 539 600 000 decimals exactes calculats.

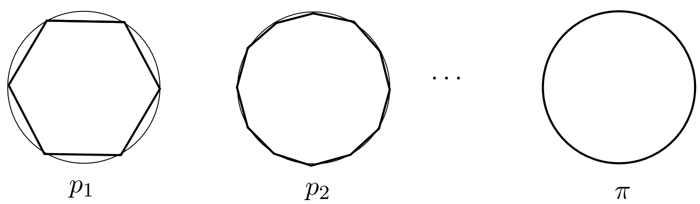


[1]Srivasa Ramanujan (1887-1920). Matemàtic hindú, autodidacte amb una gran intuïció per a trobar noves fórmules encara no ben entesa.

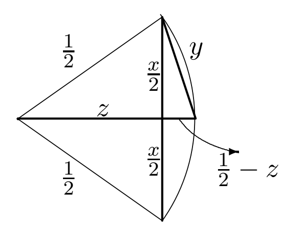
Donarem tres algorismes que permeten calcular π amb molts decimals. Observeu que cada algorisme és millor que l'anterior, en el sentit que amb menys operacions s'obtenen més decimals correctes. Vegeu també el problema 3.5.10 per a altres algorismes. Cal fer notar que π no és un nombre racional[2] i que no s'ha trobat cap regularitat a les xifres decimals de π. La bibliografia consultada és: *Dictionnaire de Mathématiques, fondements, probabilités, applications*, d'Albin Michel, Encyclopaedia Universalis, París, 1998 i *Le fascinant nombre* π de Jean-Paul Delahaye, Bibliothèque pour la Science, Diffusion Belin, París 1997.

Algorisme 1: l'aproximació d'Arquimedes

El mètode ideat per Arquimedes consisteix a aproximar π pel perímetre dels polígons inscrits a una circumferència de diàmetre 1, i cada cop més costats. Vegeu la figura següent:



Per a explicar els càlculs que farem, necessitem dues coses. La primera és el càlcul del perímetre de l'hexàgon p_1. És fàcil veure que $p_1 = 3$. En segon lloc, si anomenen x el costat d'un polígon regular, volem saber quin serà el costat y del polígon regular que té el doble de costats. Per a calcular y en funció de x usarem la figura.



L'aplicació del teorema de Pitàgores dos cops ens diu que

$$\frac{x^2}{4} + z^2 = \frac{1}{4}, \qquad \frac{x^2}{4} + (\frac{1}{2} - z)^2 = y^2.$$

Operant a la segona fórmula, $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + z^2 - z = y^2$, i usant la primera, $\frac{1}{2} - z = y^2$. Com que $z = \sqrt{\frac{1-x^2}{4}}$, concloem que $y = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x^2})}$.

Per tant, si anomenem p_n el perímetre d'un polígon regular de $6 \cdot 2^{n-1}$ costats i l_n el seu costat, tenim que

$$l_1 = \frac{1}{2}, \qquad p_1 = 3$$
$$l_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - l_n^2})}, \qquad p_{n+1} = 6 \cdot 2^n l_{n+1},$$

és una manera d'anar aproximant π, ja que $\lim_{n\to\infty} p_n = \pi$.

[2]De fet, π no és ni tan sols algebraic: és a dir, no és arrel de cap polinomi amb coeficients racionals.

El càlcul efectiu de l_{n+1} a partir de l_n produeix errors de càlcul, ja que en fer l'operació $\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-l_n^2})}$, amb l_n cada cop més petit, s'han de restar nombres molt propers. Per tant, és convenient desracionalitzar l'última expressió usant la igualtat:

$$(1-\sqrt{1-l_n^2})\frac{1+\sqrt{1-l_n^2}}{1+\sqrt{1-l_n^2}} = \frac{l_n^2}{1+\sqrt{1-l_n^2}}.$$

L'algorisme final és

$$l_1 = \frac{1}{2}, \qquad p_1 = 3$$
$$l_{n+1} = \frac{l_n}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-l_n^2})}}, \qquad p_{n+1} = 6\cdot 2^n l_{n+1}.$$

Tenim que $p_1 = \underline{3}$, $p_2 = \underline{3.1}05\ldots$, $p_3 = \underline{3.1}32\ldots$, $p_4 = \underline{3.1}39\ldots$, $p_5 = \underline{3.141}03\ldots$, $p_{15} = \underline{3.141592653}05, \ldots$

Algorisme 2: La funció arctangent

La segona via que descrivim per a calcular π es basa en la següent fórmula per a la funció arctangent

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1},$$

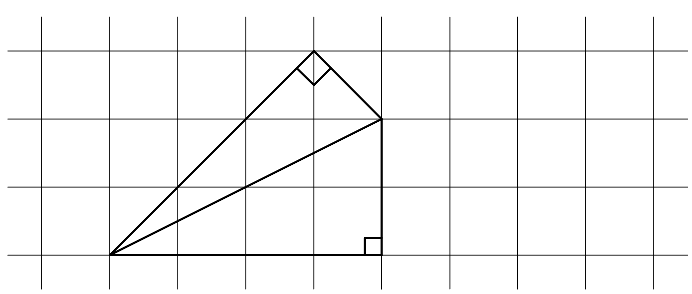
i en certes relacions trigonomètriques. Un primer intent seria a partir de la igualtat:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

Ara bé, si denotem per $\arctan_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1}$, i considerem la successió de números

$$x_n = \arctan_n(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

després d'uns quants càlculs veiem que la successió x_n convergiria cap a $\pi/4$ més lentament que la que ens dóna el mètode proposat per Arquimedes. Per sort hi ha d'altres relacions entre π i la funció arctangent. Per exemple, tenim la fórmula $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Una demostració gràfica d'aquesta darrera fórmula es pot deduir observant la figura següent, on s'han marcat els angles rectes.



Finalment, donarem un algorisme de càlcul de π basat en una fórmula similar

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}),$$

deduïda (i usada per a calcular π) per John Machin (1680-1752).

La demostració d'aquesta darrera fórmula es pot fer a partir de la fórmula de la tangent de la suma d'angles:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}, \qquad (*)$$

ja que com a conseqüència tenim que

$$\tan(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}) = \frac{\tan(4\arctan\frac{1}{5}) - \frac{1}{239}}{1 + \tan(4\arctan\frac{1}{5})\frac{1}{239}}.$$

D'altra banda, usant ara dos cops $(*)$ obtenim

$$\tan(4\arctan(x)) = \frac{4x(1-x^2)}{x^4 - 6x^2 + 1}.$$

Fent més operacions concloem que $\tan(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}) = 1$. Per tant, hem provat la fórmula de Machin.

Si considerem la successió

$$y_n = 16\arctan_n(\frac{1}{5}) - 4\arctan_n(\frac{1}{239}),$$

s'obté $y_0 = \underline{3.1}83\ldots$, $y_1 = \underline{3.14}05\ldots$, $y_2 = \underline{3.141}62\ldots$, $y_3 = \underline{3.14159}17\ldots$, $y_4 = \underline{3.14159268}2\ldots$, $y_5 = \underline{3.1415926}526\ldots$, $y_6 = \underline{3.1415926535}62\ldots$ Observeu que $\lim_{n\to\infty} y_n = \pi$.

Algorisme 3: Un mètode amb velocitat quadràtica

El 1973, i de manera independent, Eugène Salamin i Richard Brent van trobar un mètode per a aproximar π amb gran velocitat. Aquest mètode és el que s'anomena un mètode amb velocitat quadràtica. Aquest nom prové del fet que l'error en cada pas de l'algorisme és aproximadament el quadrat de l'error comés en el pas anterior. Això fa que el nombre de xifres decimals exactes es dobli iteració per iteració. Així, per exemple, el mètode que presentarem és tal que després de vint-i-cinc passos ens dóna uns 45 milions de xifres decimals exactes (suposant que tots els càlculs es fan amb aquest nombre de xifres decimals). Aquest mètode es basa en la mitjana aritmetico-geomètrica, que ja apareix en els treballs de Gauss del segle *XVIII*, i la demostració de la convergència està basada en la teoria de les integrals el·líptiques i és massa complicada per a ser inclosa aquí.

Es calcula la successió z_n, per a $n \geq 1$, a partir dels nombres $a_0, a_1, \ldots a_n$ i $b_0, b_1, \ldots, b_n$ i aplicant la fórmula:

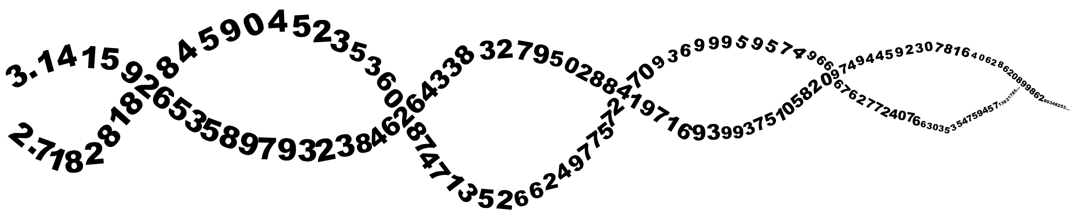
$$z_n = \frac{4a_n^2}{1 - 2\sum_{i=1}^{n} 2^n (a_n^2 - b_n^2)},$$

on els valors a_i i b_i s'obtenen de la recurrència:[3]

[3] De fet, es pot veure que $\lim_{i\to\infty} a_i$ i $\lim_{\to\infty} b_i$ existeixen i coincideixen. A aquest valor se l'anomena mitjana aritmetico-geomètrica de a_0 i b_0.

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}, \qquad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i}.$$

Tenim que $z_1 = \underline{3.1}87\ldots$, $z_2 = \underline{3.141}68\ldots$, $z_3 = \underline{3.14159265}389\ldots$, $|z_4 - \pi| < 10^{-20}$, $|z_5 - \pi| < 10^{-42}$. Actualment es coneixen algorismes de càlcul encara molt més ràpids.



π i el seu amic e.

Acabarem aquesta secció amb un tema relacionat, les fraccions contínues.

Fraccions contínues

Un cop es coneixen tots els dígits d'un cert nombre real x, ens podem preguntar quines són les fraccions que millor l'aproximen, en el sentit de buscar fraccions amb denominadors al més petits possible. La resposta a aquest problema ens la dóna la teoria de les fraccions contínues. Es construeix una successió de fraccions de la forma

$$a_0,\ a_0 + \frac{1}{a_1},\ a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},\ a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}, a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}, a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}, \ldots$$

amb $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ de manera que tendeixi a x.

Explicarem una forma de calcular $a_0, a_1, a_2, \ldots$ per al cas $x = \pi$: a_0 és la part no decimal de π és a dir $a_0 = 3$; a_1 és la part no decimal de $\frac{1}{\pi - a_0} = \frac{1}{0.3159\ldots} = 7.06\ldots$, és a dir $a_1 = 7$; a_2 és la part no decimal de $\frac{1}{7.06\cdots - 7} = 15.99\ldots$, és a dir $a_2 = 15$; a_3 és la part no decimal de $\frac{1}{15.99\cdots - 15} = 1.00\ldots$ és a dir $a_3 = 1$; i així successivament. Per tant, la successió de fraccions contínues que tendeixen a π és

$$3,\ 3 + \frac{1}{7},\ 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}},\ 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}},\ 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}, 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1}}}}}, \ldots$$

Operant resulta

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ldots$$

Observeu que aquesta successió conté les aproximacions racionals d'Arquimedes, Txu Txung Txih, i Euler, donades a la introducció d'aquesta secció, a més d'altres aproximacions racionals de π bastant bones.

Sembla que ja Arquimedes coneixia les fraccions contínues, perquè va provar que

$$\frac{1}{3}\left(5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10}}\right) < \sqrt{3} < \frac{1}{3}\left(5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5}}}\right).$$

Per a acabar, us proposem que trobeu alguna regularitat en l'aproximació per fraccions contínues del número e.

Apèndix: mil xifres decimals del número π.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
4592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
0938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596
4462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527
1201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724
5870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113
3053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218
6117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227
9381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021
7986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812
7145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430
1465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181
5981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281
6096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171
0100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287
5546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300
1927876611195909216420198...