



2.17 La llei de Titius-Bode

L'objectiu d'aquesta secció és presentar la llei coneguda com llei límit de Titius-Bode.

Hem consultat el llibre *Els amants de l'astronomia* de C.A. Ronan, Editorial Blume 1982 i l'article dels professors de la Universitat Autònoma Jaume Llibre i Conxita Pinyol, "A gravitational approach to the Titius-Bode law", *The Astronomical Journal* 93 (1987), 1272-1279.

Introduïm en primer lloc la llei de Titius-Bode.

El 1756, el científic alemany Johann Daniel Titius va establir una relació que ens dóna la distància dels planetes del nostre sistema al Sol. Només ho va observar com una nota en un peu de pàgina d'un llibre que havia traduït. Va ser Johann Elert Bode qui el 1772 va difondre més àmpliament el que avui en dia es coneix com la llei de Titius-Bode.

Per aquella època només es coneixien Mercuri, Venus, la Terra, Mart, Júpiter i Saturn. El fenomen que Titius va observar és que si considerem els números següents (observeu, que tret del 0, cadascun és el doble de l'anterior)

0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8, 9.6

i els sumem 0.4, obtenim

0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0

que són aproximadament les distàncies mitjanes¹⁰, en unitats astronòmiques¹¹, dels planetes al Sol, excepte pel que fa al 2.8 (vegeu la taula següent).

Mercuri	Venus	La Terra	Mart	Júpiter	Saturn
0.39	0.72	1.00	1.52	5.20	9.55

Distàncies mitjanes al Sol observades.



Sistema Solar.

Els astrònoms d'aquella època van trobar misteriosa la gran concordança dels números obtinguts matemàticament i les distàncies reals dels planetes al Sol, excepte pel que fa al 2.8.

¹⁰Les òrbites dels planetes són aproximadament el·lipses, i la distància mitjana d'un planeta al Sol pot pensar-se com el semieix major d'aquestes el·lipses.

¹¹En unitats astronòmiques (u.a.) la distància mitjana de la Terra al Sol es 1. Una u.a. és aproximadament 150 milions de km.

Quan William Herschel va descobrir Urà el 1781, la llei de Titius-Bode va semblar confirmar-se, ja que la seva distància mitjana al Sol és 19.18 u.a., valor proper al que es dedueix per la regla (19.6). Per això el 1800 van organitzar una recerca del *planeta perdut*. Durant un any van estar buscant algun planeta a una distància mitjana aproximada de 2.8 u.a. però sense èxit, fins que de manera independent i accidentalment, l'1 de gener de 1801, un astrònom sicilià, Guiseppe Piazzi, va descobrir el primer planeta menor. Aquest cos es va batejar amb el nom de Ceres i és situat a una distància mitjana de 2.76 u.a. (!). El 1807 ja s'havien localitzat quatre planetes petits. Avui en dia es coneix l'òrbita de milers d'aquests planetes, i el conjunt que formen s'anomena *cinturó d'asteroides*.

Quan Le Verrier va emprendre la recerca d'un nou planeta per a explicar les anomalies observades a l'òrbita d'Urà, va utilitzar la llei de Titius-Bode per a calcular la seva distància aproximada, que havia de ser de 38.8 u.a. No obstant això, quan va aparèixer Neptú,¹² va resultar estar molt més a prop, a 30.05 u.a., de manera que la llei sembla deixar d'aplicar-se més enllà d'Urà. Més endavant comentarem una possible explicació d'aquest fet. Plutó, descobert el 1930, en canvi, es mou a una distància mitjana de 39.52 u.a. del Sol, que sí que s'aproxima a 38.8.

Si expressem amb una fórmula la successió de números obtinguda per Titius, tenim

$$d_k = 0.4 + 0.3 \times 2^k.$$

Aquesta fórmula s'ha d'entendre de la manera següent: El número d_k obtingut en substituir k a l'expressió de la dreta representa la distància mitjana d'un planeta al Sol, amb la relació següent: $k = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ correspon, respectivament, a Mercuri, Venus, la Terra, Mart, asteroides, Júpiter, Saturn, Urà i Plutó. La distància al Sol del planeta Neptú no figura a la successió de números donada per la llei de Titius-Bode.

	k	d_k	Dist. mitjana observada
Mercuri	$-\infty$	0.4	0.39
Venus	0	0.7	0.72
La Terra	1	1.0	1.00
Mart	2	1.6	1.52
Asteroides	3	2.8	2.2 a 3.3
Júpiter	4	5.2	5.20
Saturn	5	10.0	9.55
Urà	6	19.6	19.18
Neptú			30.05
Plutó	7	38.8	39.52

Taula 1.

La llei límit de Titius-Bode és menys general que la llei de Titius-Bode. Aquesta afirma que si prenem dos planetes consecutius del sistema solar, bastant allunyats del Sol, aleshores la distància mitjana al Sol del més allunyat és aproximadament el doble de la distància mitjana al Sol del més proper.

¹²El descobriment de Neptú el 23 de setembre de 1846 va ser un dels grans èxits de la matemàtica, ja que la seva posició va ser predita teòricament per Urbain Jean Joseph Le Verrier i confirmada per Johan Gottfried Galle, de l'observatori de Berlín, després de només una hora de recerca i només a un grau de distància del punt predit teòricament.

Clarament, si la llei de Titius-Bode és certa, també ho serà la llei límit, ja que si prenem dos planetes consecutius del sistema solar, prou allunyats del Sol, aleshores (i ja que k és gran)

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{0.4 + 0.3 \times 2^{k+1}}{0.4 + 0.3 \times 2^k} = \frac{\frac{0.4}{2^k} + 0.3 \times 2}{\frac{0.4}{2^k} + 0.3} \approx \frac{0.3 \times 2}{0.3} = 2.$$

Per tant, si k és gran, $d_{k+1} \approx 2d_k$ (per exemple, si $k = 5$, tenim que $d_{k+1} \approx 1.96d_k$).

Si usem les distàncies mitjanes observades donades a la taula 1, obtenim els resultats següents (no tenim en compte Neptú)

$$\frac{0.72}{0.39} \approx 1.85, \frac{1.00}{0.72} \approx 1.39, \frac{1.52}{1.00} \approx 1.52, \frac{2.90}{1.52} \approx 1.91, \frac{5.20}{2.90} \approx 1.79, \frac{9.55}{5.20} \approx 1.84, \frac{19.18}{9.55} \approx 2.01, \frac{39.52}{19.18} \approx 2.06.$$

Per tant, tenim la successió 1.85, 1.39, 1.52, 1.91, 1.79, 1.84, 2.01, 2.06, que corrobora les afirmacions de la llei límit de Titius-Bode (si la distància mitjana d'un planeta al Sol fos exactament el doble que la de l'anterior, els elements d'aquesta successió foren tots el número 2).

Per donar una explicació matemàtica de la llei, necessitem tenir dues coses: un model teòric aproximat del sistema solar i unes lleis de moviment que ens permetin decidir a partir de una posició dels planetes i el Sol en un instant quina serà la seva posició després d'un cert temps. La formulació del model teòric depèn essencialment del problema concret a estudiar. Normalment és una simplificació de la realitat. Deixarem aquesta part per al final d'aquesta secció.



Saturn.

La llei que ens permet predir el moviment dels cossos és la coneguda amb el nom de *llei de la gravitació* i va ser formulada pel físic i matemàtic Isaac Newton (1642-1727). Aquesta llei ens diu que dos punts materials qualssevol s'atreuen mútuament amb una força directament proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància entre ells. Si ho expressem con una fórmula, tenim que la força F entre dos cossos de masses m i M , que estan a distància d és

$$F = G \frac{mM}{d^2},$$

on G es una constant ($G = 6.67 \times 10^{-8}$ dines·cm² · g⁻²).

Aquesta fórmula ens permet mesurar la força que exerceix la Terra sobre cossos tan variats com els éssers humans o com la Lluna.

Així, com la massa de la Terra és $M = 5.98 \times 10^{27}$ g, la força que exerceix la Terra sobre una massa $m = 100$ Kg situada sobre la superfície terrestre (és a dir, a $(40 \times 10^6)/(2\pi)$ m del centre d'aquesta) és de

$$6.67 \times 10^{-8} \frac{(100 \times 10^3)(5.98 \times 10^{27})}{((4000 \times 10^6)/2\pi)^2} = 98416241 \text{ dines},$$

que en unitats més usuals és d'uns 100 kp, i és el que anomenem *pes* de l'objecte de massa m a la Terra.¹³ Com la distància de la Lluna al centre de la Terra és aproximadament seixanta

¹³Aquest mateix objecte a la Lluna pesaria unes sis vegades menys (és a dir, la Lluna l'atrauria amb una força 6.064 vegades menor que la Terra), ja que la massa de la Lluna és de 7.35×10^{25} g i el seu radi mitjà de 1.738×10^6 m.

cops el radi de la Terra, i la massa de la Lluna és de 7.35×10^{25} g, tenim que la força amb què la Terra atreu el seu satèl·lit és de 20.09×10^{24} dines.

De la llei de la gravitació de Newton se'n poden deduir les següents propietats sobre el moviment dels planetes al voltant del Sol. Aquestes són les lleis de Kepler (1571-1630):

- (1) Els planetes descriuen el·lipses al voltant del Sol, estant aquest situat en un dels seus focus.
- (2) Les àrees escombrades pel vector posició d'un planeta respecte del Sol són iguals en temps iguals.
- (3) El quadrat del període de revolució d'un planeta és proporcional al cub del semieix major de l'el·lipse que aquest descriu.



Un segell hongarès dedicat a Kepler.

En realitat, les lleis de Kepler són anteriors a la formulació de Newton de la llei de gravitació. És més, Newton va deduir la llei de la gravitació a partir de les lleis de Kepler. Aquestes lleis van ser obtingudes per Kepler després del redescobriment¹⁴ de Copèrnic (1473-1543) del fet que la Terra girava al voltant del Sol i de les meticuloses mesures sobre la posició d'uns quants planetes realitzades per Tycho Brahe (1546-1601) (aquest va realitzar aquestes mesures sense telescopi i amb una precisió de dos minuts d'arc).

Una cop es coneixen totes les forces que actuen sobre un cos en moviment, ja es pot determinar mitjançant una relació matemàtica quina serà la seva trajectòria futura. Així, a partir de la llei de gravitació ja podem predir, almenys teòricament, el moviment futur dels cossos espacials.

Vegem ara el model simplificat del sistema solar que considerarem. Aquest estarà format pel Sol, dos planetes girant al voltant del Sol i el centre de masses (c.d.m.) de la Galàxia. Suposarem, a més, que les òrbites dels dos planetes són en un mateix pla i que giren en el mateix sentit.

Aquests tipus de problemes són coneguts a mecànica celest amb el nom de problemes de quatre cossos (en aquest cas, el c.d.m. de la Galàxia, el Sol i els dos planetes). A partir de la llei de la gravitació es coneixen les equacions que regiran el moviment d'aquests quatre cossos, però no és coneguda la solució d'aquestes equacions. Per tant, per a tenir una idea de com és el moviment dels quatre cossos, necessitarem encara més simplificacions.

El camí usual és suposar que tres d'aquests cossos es mouen d'una manera preestablerta i el quart (que es considera que no afecta el moviment dels altres tres), seguint la llei de Newton de la gravitació. Aquesta manera preestablerta de moure's serà al més semblant possible al moviment real observat.

En el nostre cas, suposarem que el c.d.m. del Sol-planeta interior es mou en una òrbita circular al voltant del c.d.m. de la Galàxia, i que el Sol i el planeta interior es mouen també

¹⁴Ja alguns astrònoms grecs, com Aristarc de Samos (310-230 a.C.), creien que era la Terra la que feia voltes al Sol.

en òrbites circulars al voltant del seu centre de masses. El pla descrit pel c.d.m. del Sol- planeta interior és aproximadament el pla galàctic, i aquest està inclinat un angle d'uns 60 graus respecte al pla que conté l'òrbita del Sol i el planeta interior (aproximadament, el pla de l'eclíptica).

Després d'un estudi detallat de les equacions diferencials corresponents a aquest últim model, s'obté una possible explicació del per què es compleix la llei límit de Titius-Bode: *D'entre totes les trajectòries tancades que podria seguir el planeta exterior, se'n troba una família d'aquestes entre les quals la més estable¹⁵ correspon a una òrbita aproximadament circular i amb un radi proper a uns $3^{\frac{2}{3}} \approx 2.08$ cops el radi de l'òrbita circular del planeta interior.*

Observem que en aquest model s'ha considerat que el planeta exterior no influeix en el moviment dels altres tres cossos. Això mai no és cert, però és raonable suposar-ho si la seva massa és bastant més petita que la d'aquests. Si prenem com a referència la massa de la Terra (és a dir, aquesta massa igual a 1) las masses de Júpiter, Saturn, Urà, Neptú i Plutó són respectivament 317.8, 95.1, 14.5, 17.2, 0.1. Per tant, és raonable que el model matemàtic simplificat estudiat modeli la realitat en considerar Júpiter i Saturn, o Saturn i Urà, però no és raonable per a Urà i Neptú (la massa de Neptú és més gran que la d'Urà). Aquesta és, doncs, una possible explicació de per què la llei de Titius-Bode no s'aplica a Neptú.

Per a acabar, comentarem que la llei límit de Titius-Bode es formula de vegades en termes dels períodes de translació dels planetes al voltant del Sol (no s'inclouen en aquest cas els asteroides). La llei límit pot enunciar-se dient que el període de translació d'un planeta al voltant del Sol és aproximadament el triple que el del planeta anterior. Així, per exemple, (si no tenim en compte Neptú) sabem que els períodes dels planetes Júpiter, Saturn, Urà i Plutó són respectivament (en anys terrestres) 11.86, 29.46, 84.02 i 247.70. L'equivalència entre aquesta formulació i l'explicada anteriorment ens la dóna la tercera llei de Kepler.

¹⁵Podem entendre el fet que una trajectòria és la més estable, com també el fet que aquesta trajectòria és la que és més probable que segueixi existint encara que el model que tinguem sofreixi petits canvis. No oblidem que hem estudiat un model aproximat del sistema solar real, i que creiem que el model real és proper a aquest.