2.13 Travesses i transmissió d'informació

D'entre els jocs d'apostes, les travesses és un dels que crida més l'atenció dels matemàtics. La raó potser és que mentre que a la loteria clàssica o a la Loto 6-49 l'únic que intervé és l'atzar, en les travesses també intervé la informació prèvia que es té sobre cada partit. Així quan dos equips s'enfronten es poden fer moltes consideracions que permetin concloure que potser els tres resultats possibles 1, x i 2 no són igualment probables. A partir d'aquesta informació, tots els resultats que poden sortir en una travessa (3^{14} sense tenir en compte el partit complementari) han deixat de ser equiprobables, i és aquí on poden intervenir les matemàtiques per racionalitzar les apostes que es fan.

S'han desenvolupat molts mètodes que permeten aprofitar el màxim les apostes: reduccions, teoria d'errors, nombre màxim i mínim de x i 2, mètodes probabilístics, mètodes mixtes, etc. Aquests mètodes poden donar bons resultats si es fan moltes apostes. En aquestes notes explicarem un dels casos més senzills del mètode anomenat de reduccions al 13.

Ens ocupem d'un grup de set partits pels quals els nostres experts en futbol han predit que només sortirà 1 o x. Aleshores, per a assegurar que sigui quin sigui el resultat dels set partits l'encertem (recordem que suposem que només pot sortir 1 o x), necessitem fer $2^7 = 128$ apostes. Decidim que això és massa car. La qüestió és: podem aprofitar la informació que tenim sense gastar tant? La idea de la reducció al 13 és la següent: En lloc de fer les 128 apostes, farem un nombre molt menor d'apostes de manera que siguin quins siguin els resultats dels set partits (sempre que surti 1 o x) en el nostre conjunt d'apostes sempre encertem com a mínim sis dels set resultats. Aquesta reducció al 13 de set partits amb pronòstic doble és molt coneguda i està donada en la taula 3. Observi's que el nom de reducció al 13 està donat pel fet que, si encertem els altres set partits, i en els set partits en els que hem predit 1 o x això es compleix, en les nostres setze apostes hi haurà un 13 (o un 14).

x	x	x	x	x	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1
x	x	x	x	1	1	1	1	x	x	x	x	1	1	1	1
x	x	1	1	x	x	1	1	x	x	1	1	x	x	1	1
x	1	x	1	x	1	x	1	x	1	x	1	x	1	x	1
x	x	1	1	1	1	x	x	1	1	x	x	x	x	1	1
x	1	x	1	1	x	1	x	1	x	1	x	x	1	x	1
x	1	1	x	x	1	1	x	1	x	x	1	1	x	x	1

Taula 3. Reducció al 13 de set dobles

Una prova de les afirmacions anteriors és la següent: Notem que per a cada una de les apostes hi ha vuit conjunts de resultats que tenen exactament cap error o un respecte de l'aposta. Com que cada una de les 16 columnes de la taula 3 es diferencia com a mínim en tres resultats amb cada una de les 15 columnes restants, tenim que quan apostem les 16 columnes de la taula cobrim 16×8 resultats (amb cap error o un), i $16 \times 8 = 128$, que és el conjunt de totes les apostes possibles.

Observem quina és la filosofia general dels mètodes aplicats a les travesses en el cas concret de set partits. Si no en tenim cap informació, fem $3^7 = 2\,187$ apostes i cobrim tots els resultats (és molt car). Si uns experts en futbol ens eliminen un resultat de cada partit, el nombre d'apostes que necessitem és només $2^7 = 128$ per a cobrir els resultats predits. Si ens conformem d'encertar només sis partits (suposant que els experts no s'hagin equivocat), en tenim prou fent 16 apostes. En resum, els mètodes permeten racionalitzar les apostes perquè gastant el mínim possible "cobrim"el màxim nombre de resultats.

Ara explicarem com la mateixa idea que permet fer les reduccions al 13 per set dobles és utilitzada en un context totalment diferent. Això ens pot fer reflexionar sobre el fet que de vegades es poden estar desenvolupant problemes que des d'un punt de vista són lúdics (com a l'exemple) o pertanyen a la matemàtica anomenada teòrica i, finalment, els resultats que s'obtenen són utilitzats a la tècnica, o en altres contexts totalment diferents.

Considerem la taula 3 però substituint les x per 0. Fixem-nos que les quatre primeres files corresponen a l'expressió en base dos de tots els nombres naturals entre 0 i 15. Així, per exemple, la columna corresponent al 13 és 1101010, ja que $13 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = 1101_2$.

Abans de continuar, recordem que qualsevol informació es pot digitalitzar (és a dir, com en el cas dels nombres se li pot associar una successió única de zeros i uns de manera que donada la informació obtinguem la successió de zeros i uns (codificació), i donada la successió obtinguem la informació (descodificació)). Veurem ara que la taula 3 (canviant x per 0 coneguda com codi de Hamming de longitud 7) ens serveix per a minimitzar els errors en la transmisió d'informació.

Suposem que hi ha un emissor i un receptor que es volen enviar una informació codificada (per a simplificar suposarem que es volen enviar un nombre natural entre 0 i 15). A més, suposem que el mecanisme de transmisió digital comet molt pocs errors (per exemple, té un error d'un 1%, és a dir, en mitjana canvia un de cada 100 dígits enviats).

Opció 1: *transmissió sense usar cap prevenció per errors.*

$$13 \quad \overset{\text{codificar}}{\longleftrightarrow} \quad 1101 \overset{\text{enviar}}{\dashrightarrow} \begin{cases} 1101, \ \left(\dfrac{99}{100}\right)^4 \% = 96.06\% \text{ dels casos} \\ \text{almenys un error, } 3.94\% \text{ dels casos} \end{cases}$$

$$\overset{\text{descodificar}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 13, \ 96.06\% \text{ dels casos} \\ \text{error, } 3.94\% \text{ dels casos} \end{cases}$$

Suposem ara que, com a prevenció per a evitar errors, usem la idea següent: en lloc d'enviar els quatre dígits en base 2, n'enviem set (els tres últims són els tres corresponents a la columna del codi de Hamming). Aleshores, quan el receptor rebi els set dígits, si no hi ha hagut cap error serà una de les setze columnes, però si hi ha hagut només un error se'n podrà adonar i el podrà corregir (observi's què de la manera en que s'ha construït la taula 3 cada successió de set dígits té cap o un error només respecte a una de les columnes). Per tant, es pot considerar que la informació arribarà malament si es produeixen almenys dos errors. Ilustrem-ho amb l'exemple de la transmissió del 13.

Opció 2 *transmissió usant prevenció d'un error.*

$$13 \overset{\text{codificar}}{\longleftrightarrow} 1101 \overset{\text{afegir control}}{\longrightarrow} 1101010$$

$$\overset{\text{enviar}}{\dashrightarrow} \begin{cases} \text{cap o un error}^8, \ 99.8\% \text{ dels casos} \\ \text{més d'un error, } 0.2\% \text{ dels casos} \end{cases} \overset{\text{Codi Hamming}}{\longrightarrow} \begin{cases} 1101010 \\ \text{error} \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} 1101 \\ \text{error} \end{cases} \overset{\text{descodificació}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 13, \ 99.8\% \text{ dels casos} \\ \text{error, } 0.2\% \text{ dels casos} \end{cases}$$

Observem així que usant aquesta última idea podem assegurar que en un 99.8% dels casos es rep el que s'envia, mentre que si no s'uses cap control de l'error, només es podia assegurar en un 96.06% dels casos. Versions més complicades d'aquesta idea inicial de Hamming són utilitzades actualment. Podeu consultar, per exemple, la traducció de la revista *Unizürich* feta per la Societat Catalana de Matemàtiques, *La matematizació del món* (1994).

[8] "Cap error"es calcula com $100\left(\frac{99}{100}\right)^7\%$. "Un error,"com $100\left(7\left(\frac{99}{100}\right)^6\frac{1}{100}\right)\%$. Així cap error o un es dóna en el $\frac{99^7+7\times 99^6}{100^6}\% = 99.8\%$ dels casos.